

Ф.Олвер

ВВЕДЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	7
Предисловие к книге «Asymptotics and Special Functions»	3
ГЛАВА 1	
Введение в асимптотические методы	
§ 1. Происхождение асимптотических разложений	11
§ 2. Символы \sim , o и O	15
§ 3. Символы \sim , o и O (продолжение)	17
§ 4. Интегрирование и дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка	19
§ 5. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений: действительные переменные	23
§ 6. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений: комплексные переменные	27
§ 7. Определение и основные свойства асимптотических разложений	29
§ 8. Операции над асимптотическими разложениями	33
§ 9. Функции, имеющие заданные асимптотические разложения	37
§ 10. Обобщения определения Пуанкаре	40
§ 11. Анализ остаточных членов; вариационный оператор	43
Исторические сведения и дополнительные ссылки	46
ГЛАВА 2	
Введение в специальные функции	
§ 1. Гамма-функция	47
§ 2. Пси-функция	56
§ 3. Интегральные функции: показательная, логарифмическая, синус и косинус	57
§ 4. Интеграл вероятностей, интеграл Досона и интегралы Френеля	62
§ 5. Неполная гамма-функция	64
§ 6. Ортогональные полиномы	65
§ 7. Классические ортогональные полиномы	68
§ 8. Интеграл Эйри	74
§ 9. Функция Бесселя $J_\nu(z)$	78
§ 10. Модифицированная функция Бесселя	83
§ 11. Дзета-функция	84
Исторические сведения и дополнительные ссылки	88
ГЛАВА 3	
Интегралы в действительной области	
§ 1. Интегрирование по частям	90
§ 2. Интегралы Лапласа	92
§ 3. Лемма Ватсона	95

§ 4. Лемма Римана — Лебега	98
§ 5. Интегралы Фурье	100
§ 6. Примеры; случаи, когда метод неэффективен	102
§ 7. Метод Лапласа	107
§ 8. Асимптотические разложения на основе метода Лапласа; гамма-функция при больших значениях аргумента	113
§ 9. Оценки остаточных членов для леммы Ватсона и метода Лапласа	118
§ 10. Примеры	122
§ 11. Метод стационарной фазы	127
§ 12. Предварительные леммы	129
§ 13. Асимптотическая природа метода стационарной фазы	132
§ 14. Асимптотические разложения на основе метода стационарной фазы	136
Исторические сведения и дополнительные ссылки	137

ГЛАВА 4

Контурные интегралы

§ 1. Интеграл Лапласа с комплексным параметром	139
§ 2. Неполная гамма-функция комплексного аргумента	143
§ 3. Лемма Ватсона	146
§ 4. Интеграл Эйри с комплексным аргументом; составные асимптотические разложения	151
§ 5. Отношение двух гамма-функций; лемма Ватсона для интегралов по петле	154
§ 6. Метод Лапласа для контурных интегралов	158
§ 7. Точки перевала	163
§ 8. Примеры	165
§ 9. Функции Бесселя при больших значениях аргумента и порядка	169
§ 10. Оценки остаточного члена для метода Лапласа; метод наибыстрейшего спуска	174
Исторические сведения и дополнительные ссылки	177

ГЛАВА 5

Дифференциальные уравнения с регулярными особыми точками; гипергеометрическая функция и функции Лежандра

§ 1. Теорема существования для линейных дифференциальных уравнений: действительные переменные	178
§ 2. Уравнения, содержащие действительный или комплексный параметр	183
§ 3. Теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений: комплексные переменные	185
§ 4. Классификация особых точек; свойства решений в окрестности регулярной особой точки	189
§ 5. Второе решение в случае, когда разность показателей равна целому числу или нулю	192
§ 6. Большие значения независимой переменной	195
§ 7. Численно удовлетворительные решения	196

§ 8. Гипергеометрическое уравнение	198
§ 9. Гипергеометрическая функция	202
§ 10. Другие решения гипергеометрического уравнения	207
§ 11. Обобщенные гипергеометрические функции	213
§ 12. Присоединенное уравнение Лежандра	214
§ 13. Функции Лежандра при произвольных значениях степени и порядка	221
§ 14. Функции Лежандра при целых значениях степени и порядка	228
§ 15. Функции Феррерса	235
Исторические сведения и дополнительные ссылки	240

ГЛАВА 6

Приближение Лиувилля — Грина

§ 1. Преобразование Лиувилля	242
§ 2. Оценки остаточных членов: действительные переменные	246
§ 3. Асимптотические свойства относительно независимой переменной	251
§ 4. Сходимость $\mathcal{V}(F)$ в особой точке	256
§ 5. Асимптотические свойства относительно параметров	259
§ 6. Пример: функции параболического цилиндра при больших значениях порядка	264
§ 7. Одно специальное обобщение	266
§ 8. Нули	270
§ 9. Задачи на собственные значения	274
§ 10. Теоремы о сингулярных интегральных уравнениях	278
§ 11. Оценки остаточных членов: комплексные переменные	281
§ 12. Асимптотические свойства в случае комплексных переменных	286
§ 13. Выбор поступательных путей	287
Исторические сведения и дополнительные ссылки	291

ГЛАВА 7

Дифференциальные уравнения с иррегулярными особыми точками; функции Бесселя и вырожденная гипергеометрическая функция

§ 1. Решения в виде формальных рядов	293
§ 2. Асимптотическая природа формальных рядов	296
§ 3. Уравнения, содержащие параметр	302
§ 4. Функция Ганкеля; явление Стокса	303
§ 5. Функция $Y_\nu(z)$	309
§ 6. Нули функции $J_\nu(z)$	313
§ 7. Нули функции $Y_\nu(z)$ и других цилиндрических функций	318
§ 8. Модифицированные функции Бесселя	320
§ 9. Вырожденное гипергеометрическое уравнение	325
§ 10. Асимптотические решения вырожденного гипергеометрического уравнения	328
§ 11. Функции Уиттекера	333
§ 12. Оценки остаточного члена для асимптотических решений в общем случае	335

§ 13. Оценки остаточного члена для разложений Ганкеля	341
§ 14. Неоднородные уравнения	346
§ 15. Уравнение Струве	352
Исторические сведения и дополнительные ссылки	356
Ответы к упражнениям	357
Литература	359
Общий указатель	367
Алфавитный указатель	374

ОБЩИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель (Abel N. H.) 14	фазы)
Абеля теорема о непрерывности	—, история 14, 46
степенного ряда 42	— обобщенное 41, 46, 153
— тождество 182	— операции 33—37
Айнс (Ince E. L.) 240, 296	— определение Пуанкаре 14, 21)
Ангера функция 112, 135	40, 137
Асимптотика 43	— основные свойства 29—32
Асимптотическая переменная 29	— составное 153
— последовательность 40	— сходимость 31, 32
— сумма 38	— функции с заданными
— шкала 40	асимптотическими
Асимптотические приближения (см.	разложениями 37—39, 46
Асимптотическое разложение,	Асимптотическое разложение,
асимптотические соотношения)	экспоненциально малые члены
— решения дифференциальных	104—105, 126, 137
уравнений (см.	— решение дифференциальных
Дифференциальные уравнения)	уравнений (см.
— соотношения 15—19, 40 (см.	Дифференциальные уравнения)
также Асимптотическое	Б. А. (British Association for the
разложение)	Advancement of Science) 173
Асимптотическое поведение	Барне (Barns E. W.) 84
степенного ряда на границе	Бахман (Bachmann P.) 15
круга сходимости 42	Берг (Berg L.) 46
Асимптотическое разложение 15, 12	Бесселя уравнение 79
(см. также Асимптотические	— модифицированное 83
соотношения, Асимптотика,	— неоднородное 352
Дифференциальные уравнения)	—, численно удовлетворительные
— граничная постоянная 16 18, 29	решения 309—310, 356
—, до N -го члена 30	Бесселя функции 78, 80 310 (см.
—, единственность 30	также Бесселя уравнение,
— интегралов 90—95, 100—100,	Ганкеля функции,
139—146 (см. также Ватсона	Модифицированные функции
лемма, Лапласа метод, метод	Бесселя)
перевала, метод стационарной	—, аналитическое продолжение

80, 314
 —, вронскиан 312
 —, графики 311
 —, дифференциальное уравнение 79
 —, интеграл Бесселя 78
 —, — Пуассона 83
 —, интегральные представления 78—82, 312, 355, 356
 —, интегралы 82, 83, 313, 356, 357
 —, — Мелера — Сонина 312
 —, — Шлефли 81
 —, история 356
 —, мнимого аргумента 83
 —, нули 273, 313—320, 356
 —, оценки 82
 —, первого, второго, третьего рода 309
 —, полуцелого порядка 82, 309, 312
 —, при больших значениях аргумента 169, 310, 345
 Бесселя функции производные по порядку 311, 313
 —, производящая функция 79
 —, рекуррентные формулы 81
 —, ряды 78, 80
 —, связь с вырожденной гипергеометрической функцией 327
 —, теорема сложения Неймана 82
 —, формулы связи 305, 306, 309—312
 Бета-функция 53, 54
 Блайстейн (Bleistein N.) 137, 138
 Бойн (Boin P. W. M.) 138
 Бриллюан (Brillouin L.) 291
 Бромвич (Bromwich T. J. Ga) 12, 34, 46
 Буркхардт (Burkhardt H.) 137
 Бухгольд (Buchholz H.) 356
 Бэкхум (Bakhoora N. G.) 112
 Вазов (Wasow W.) 356
 Ван-дер-Корпут (van der Korput J. G.)

43
 Вариационный оператор 43
 Вариация 43—45
 —, сходимость в особой точке 256—258
 Ватсон (Watson G. N.) 46, 88, 96, 137, 195, 206, 240, 291, 315, 319, 325, 344, 345, 356
 Ватсона лемма
 — для действительных переменных 95
 — интегралов по петле 156
 — комплексных переменных 146
 —, история 137
 —, оценки остатка 118—122, 137, 149—151
 Вебер (Weber H. F.) 135
 Вебера дифференциальное уравнение 188, 264, 273
 Вебера функции параболического цилиндра (см. Функции параболического цилиндра)
 — функция $E_\nu(z)$ 135
 — $Y_\nu(z)$ 245 (см. также Функции Бесселя)
 Вентцель (Wentzel G.) 291
 Вероятностей интеграл 62, 89
 —, асимптотическое разложение 91, 146
 —, дополнительный 62
 —, связь с гамма-функцией 65
 Весовая функция 65
 ВКБ-метод (или ВКБД метод) 291 — 292
 Вполне монотонная функция 93, 95
 Вронскиан 181
 Выделенная точка 17, 40
 Вырожденная гипергеометрическая функция 326 (см. также Лагерра полиномы, Уиттекера функции)
 —, вронскиан 327, 331
 —, зависимость от параметров

- 326
- — —, интегральные представления 327—329
- — —, история 356
- — —, преобразования Куммера 328, 329
- — — при больших значениях аргумента 328—330
- — —, рекуррентные формулы 328, 332
- Вырожденное гипергеометрическое уравнение 325 (см. также Уиттекера уравнение)
- — —, асимптотические решения 328
- — — с показателями, отличающимися на целое число 331
- — —, формулы связи для решений 329—332
- — —, численно удовлетворительные решения 332
- Гамма-функция 47 (см. также Гамма-функция неполная, Пси-функция)
- — —, асимптотическое разложение 113—117, 143
- — —, интеграл Ганкеля по петле 54—55
- — —, — Похгаммера по петле 56.
- — —, интегралы Эйлера 47, 53
- — —, история 64
- — —, минимум 57
- — —, неполная 64
- — —, особые точки 49
- — —, предельная формула Эйлера 50
- — —, представление в виде произведения 51
- — —, разложение в $z=1$ 88
- — —, рекуррентная формула 48
- — —, формула отражения 52
- — —, — удвоения 52
- — —, — умножения 52
- — —, неполная 64, 89, 131
- — —, асимптотическое разложение 90—91, 94—95, 143—146, 174
- Гамма-функция неполная, дополнительная 64, 65
- — —, оценки 91, 95, 174
- — —, связь с гипергеометрической функцией
- Ганкель (Hankel H.) 54, 172
- Ганкеля разложения 304
- — —, оценки остатка 341—344
- функции 303
- — —, аналитическое продолжение 304
- — —, вронскианы 309
- — —, интегралы Ганкеля 308
- — —, — Зоммерфельда 308
- — —, оценки 346
- — —, полужелого порядка 303
- — — при больших значениях аргумента 304—306, 341—345
- — —, рекуррентные формулы 308
- — —, связь с функциями Бесселя 305, 306, 309
- Ганс (Gans R.) 292
- Гаусс (Gauss C. F.) 205
- Геллер (Geller H.) 89
- Гипергеометрическая функция 202 (см. также Гипергеометрическое уравнение)
- — —, асимптотическое разложение при больших значениях параметров 206—207
- — —, зависимость от параметров 203
- — —, интеграл Похгаммера по петле 206
- — —, интегральные представления 204, 206
- — —, история 240—241
- — —, квадратичное преобразование 212

- обобщенная 213, 240
- , особые точки 203
- , поведение в $z=1$ 204, 209 — 210
- при больших значениях аргумента 211
- , производные 206
- , связь с элементарными функциями 203, 205
- смежная 206, 225
- Гипергеометрический ряд 202
- Гипергеометрическое уравнение 198
- , второе решение при $c = -1$, — 2, ... 212—213
- обобщенное 213
- , формулы связи для решений 209—212
- Главное значение интеграла (в смысле Коши) 58, 59
- Гобсон (Hobson E. W.) 234, 241
- Грин (Green G.) 291, 292
- Гудвин (Goodwin E. T.) 63
- Гудвина — Стентона интеграл 63, 150
- Дебаи (Debye P.) 173, 177
- Де Брейн (de Bruijn N. G.) 40, 46, 177
- Де Кок (de Kok F.) 138
- Джеффрис (Jeffreys H.) 263, 291, 292
- Джоунс Д. С. (Jones D. S.) 137, 175
- Джоунс О. Л. (Jones A. L.) 322
- Дзета-функция 84—88
- Дигамма-функция 56
- Дифференциальные уравнения (см. Связи формулы, Иррегулярные особые точки, ЛГ-приближение, Особые точки дифференциальных уравнений)
- , метод Коши для теорем существования 189
- , — Пикара для теорем существования 181
- , — последовательных приближений 181, 208
- , нормальный ряд 285
- , нули решений 270 — 273
- , обыкновенная точка 189, 195
- , подчиненные решения 197, 254
- , решения доминирующие 197, 254
- , —, линейная независимость 181, 186, 196
- , — локальное поведение 242
- , — неоднородные 182, 346—351
- , — нормальные 295
- , — осцилляторного типа 243
- , — субнормальные 296
- , — фундаментальные 181 — 186
- , — численно удовлетворительные 196 — 198, 286
- с простым полюсом 266—270 (см. также Особые точки дифференциальных уравнений)
- с тремя особыми точками 199
- , теоремы существования для действительных переменных 178—188, 240
- , тождество Кейли 245
- Дифференциальные уравнения с параметром (см. Связи формулы, ЛГ-приближение, Особенности дифференциальных уравнений)
- , —, асимптотические решения 259—264, 266—269, 287
- , —, голоморфность решений 185, 187, 302
- , —, непрерывность решений 183, 185
- , —, нули решений 270—273
- , —, оценки остатков для асимптотических решений 259 — 261, 266
- , —, собственные значения

- 274, 292
 ———, — решения 274, 276
 ———, — функции 274
 Дуги R_1, R_2, R_∞ 188
 Евграфов М. А. 111
 Жордана неравенство 59
 Задачи на собственные значения 274—278
 Интегральная показательная функция 56—59, 89
 ———, асимптотическое разложение 146, 291
 ——— дополнительная 58
 ——— обобщенная 61
 ———, связь с гамма-функцией 65
 Интегральные уравнения 278—281, 292
 Интегральный косинус 60, 61
 ———, асимптотическое разложение 91
 ———, преобразование Лапласа 61
 — логарифм 59, 88
 — синус 59
 ———, асимптотическое разложение 91
 ———, преобразование Лапласа 61
 Интегрирование рядов асимптотических 34—35
 ——— сходящихся 176
 Иррегулярные особые точки 189 (см. также Особые точки дифференциальных уравнений)
 ———, асимптотические решения 251—255, 286—287, 296—302
 ———, история 356
 ———, ЛГ-приближение 294
 ——— на бесконечности 195—196
 ——— неоднородных уравнений 346—351
 Иррегулярные особые точки, нормальные решения 295
 ———, оценки остатков для асимптотических решений 284, 340, 356
 ———, ранг 189, 196
 ———, характеристическое значение 295
 ———, — уравнение 295
 Казаринов (Kazarinoff N. D.) 356
 Калоджеро (Calogero F.) 268
 Каратеодори (Carathéodory C.) 240
 Карлеман (Carleman T.) 46
 Карлини (Carlini F.) 291
 Кельвин (Kelvin (Lord)) 137
 Кельвина функции 84
 Кертис (Curtis A. R.) 296
 Клаузен (Klausen Th.) 214
 Кон (Kohn J. H. E.) 292
 Коппель (Coppel W. A.) 259
 Копсон (Copson E. T.) 36, 83, 157, 160, 177
 Кохран (Kochran J. A.) 322
 Крамере (Kramers H. A.) 291
 Кронекера символ 66 Куммера функция 326 (см. также вырожденная гипергеометрическая функция)
 Лагерра полиномы 69, 71, 74
 ———, связь с вырожденными гипергеометрическими функциями 332
 Лайнесс (Lyness J. N.) 137
 Лангер (Langer R. E.) 292
 Ландау (Landau E.) 15
 Лаплас (Laplace, Le Marquis de) 107
 Лапласа интеграл 92
 ———, аналитическое продолжение 141-142
 ———, асимптотическое разложение 92—95, 139—143
 — метод 107, 113
 ——— для контурных интегралов 158—162
 ———, история 137
 ———, оценки остатка 120 127 137, 174—175

- , примеры 110 — 112, 115 — 117, 165—168
- , связь с методом стационарной фазы 128
- преобразование 146
- , абсцисса сходимости 147
- ЛГ-приближение, асимптотические свойства 251—264, 286—287
- в особых точках 256—259, 261 — 264, 266
- для комплексных переменных 286
- , история 291 — 292
- , одно обобщение 266—270
- , оценки остатка 246, 250, 205—266, 267, 286
- , производная остатка по параметру 276
- , условие точности 246
- ЛГ-функции 244
- Лежандра полиномы 68 (см. также Феррерса функции, Лежандра функции)
- , дифференциальное уравнение 72
- , интеграл Лапласа 74
- , — Шлефли 72
- , оценка 74
- , при большом значении степени 112, 165 — 167
- , производящая функция 72
- , рекуррентные формулы 71, 74
- , формула Родрига 69
- Лежандра уравнение 214
- функции 215, 221 (см. также Лежандра полиномы, Присоединенное уравнение Лежандра)
- , аналитическое продолжение 227
- , вронскианы 218
- , интеграл Гейне 234
- , — Неймана 232
- интегральные представления 221, 224—228, 230—232
- , история 240—241
- на разрезе 235
- , оценка 235
- , поведение в особых точках 217, 219 — 220, 231
- порядка или степени, равных $\pm 1/2$ 219—220
- порядок 221
- при большом значении степени 263
- производящая функция 235
- , рекуррентные формулы 224—225, 228
- , теорема сложения 233
- , формула Уиппла 220
- , формулы связи 217—218
- целого порядка 228, 235
- Лиувилль (Liouville J.) 291, 192
- Лиувилль — Грин см. ЛГ-приближение, ЛГ-функции
- Лиувилля — Неймана разложение Лиувилля преобразование Ловерье (Lauwerier H. A.) 168
- Ломмель (Lommel E. C. J.) 314
- Ломмеля метод отделения нулей 314
- Лью (Lew J. S.) 137
- Люк (Luke Y. L.) 89, 206, 240, 356
- Макдопальд (Macdonald H. M.) 323
- Макдональда функция 320 (см. также Модифицированные функции Бесселя)
- Мак-Роберт (MacRobert T. M.) 241
- Максимон (Maximon L.) 105
- Мак-Хаф (McHngh J. A. M.) 292
- Медхерст (Medhurst R. G.) 124
- Метод наискорейшего спуска 174—177 (см. также Метод Лапласа)
- последовательных приближений 181
- стационарной фазы 127, 132—137

- — —, история 137
- — —, примеры 134 — 136
- — —, связь с другими методами 128, 137—138, 177
- Миллер (Miller J. C. P.) 197, 292
- Модифицированное уравнение Бесселя 83
- — —, численно удовлетворительные решения 321
- Модифицированные функции Бесселя 83
- — —, аналитическое продолжение 324
- — —, вронскианы 321
- — —, графики 322
- — —, интеграл Бассета 325
- — —, нули 323—325
- — — при больших значениях аргумента 110, 122—124, 321, 322
- — —, рекуррентные соотношения 83, 324
- — —, свойства монотонности 322
- — —, связь с вырожденными гипергеометрическими функциями 327, 332
- Моменты 95
- Монодромии теорема 186
- Монотонности условие 285
- —, необходимость 301
- Наттерер (Natterer F.) 292
- НГ (Ng E. W.) 89
- Нули, асимптотические приближения 270—273, 292
- Оберхеттингер (Oberhettinger F.) 356
- Одвер (Olver F. W. J.) 102, 122, 124, 137, 143, 146, 175, 177, 291, 292, 320, 346, 354, 356
- Ортогональные полиномы 65—74 (см. также Лагерра полиномы, Лежандра полиномы, Эрмита полиномы, Якоби полиномы)
- — —, дифференциальные уравнения 72, 73
- — — классические 68—74
- — —, нормировка 66
- — —, нули 67
- — —, производящие функции 73, 74
- — —, процесс Грама — Шмидта 67
- — —, рекуррентные формулы 66, 71, 72, 74
- — —, формула Кристоффеля — Дарбу 68
- Ортонормальные полиномы 66
- Особые точки дифференциальных уравнений (см. также Дифференциальные уравнения, Иррегулярные особые точки, ЛГ-приближение)
- — — на бесконечности 195—196
- — —, определяющее уравнение 190
- — —, показатели 190, 196
- — —, —, отличающиеся на целое число 192—195
- — —, разложения в них 189 — 190, 195
- — —, ранг 189, 196
- — —, регулярные 189, 195
- — —, численно удовлетворительные решения 196—198
- Остаток, остаточный член 12
- Пайк (Pike E. R.) 292
- Папнеритца уравнение 200
- Параболического цилиндра функции 264—266 (см. также Вебера дифференциальное уравнение)
- — —, интегральное представление 266
- — —, обозначение 264, 292
- — — при большом значении порядка 264—266, 292
- — —, связь с вырожденными

- гипергеометрическими функциями 332
 Питтнауэр (Pittnauer F.) 46
 Полна (Polya G.) 137
 Полусходящийся ряд 13
 Порядка отношения 15—19
 — —, граничная постоянная 16, 18
 Поступательные пути 285, 340
 — —, выбор 287—290
 Похгаммер (Pochhammer L.) 56
 Похгаммера обозначение (a) 202
 Прима функция 64
 Принцип аргумента 317
 — —, пример 323—324
 Производная в смысле Шварца 243
 Пси-функция 56, 57
 — —, формула Гаусса 87
 Пуанкаре (Poincaré H.) 14, 40, 43, 187
 Рассеяния теория 267
 Регулярная дуга 45, 188
 Редхеффер (Redheffer R. M.) 160
 Рейдинк (Reudink D. O. J.) 322
 Рейли (Rayleigh (Lord)) 292
 Ренч (Wrench J. W.) 117
 Рискстыннп Э. 46
 Риккати уравнение 244
 Риман (Piemann B.) 86, 88, 89, 177, 200, 201
 Римана — Лебега лемма 98, 99 130, 137
 Римана уравнение 200
 Ритт (Ritt J. F.) 46
 Ритчи (Ritchie R. H.) 63
 Роберте (Roberts, T. H.) 124
 Робин (Robin L.) 241
 Р. С. (Royal Society) 317, 350
 Свирлс Б. С. 263
 Связи формулы 210, 291—292
 Сеге (Szego G.) 89, 137, 177
 Седловая точка 164, 176
 Спбуя (Sibuya Y.) 356
 Слейтер (Slater L. J.) 240, 356
 Сноу (Snow C.) 241
 Стационарные точки 127
 Стейниг (Steinig J.) 356
 Стейтон (Staton J.) 63
 Стенджер (Stanger F.) 356
 Стеффенсен (Steffensen J. F.) 93
 Стильтеса преобразование 122
 Стирлинга формула 117
 Стоке (Stokes G. G.) 137
 Стокса явление 307
 Струве уравнение 352
 — функция 352, 356
 Суини (Sweeney D. W.) 88
 Тени зоны 285
 — —, необходимость 301
 Тетрагамма-функция 56
 Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 42, 89
 Томе (Thomson L. W.) 295
 Торн (Thorne R. C.) 285
 Точки перевала 164, 176
 — поворота (ветвления) 144
 Трансцендентные уравнения, асимптотические решения 23—29, 46
 Тригамма-функция 56
 Трикоми (Tricomi F. G.) 156, 356
 Уаймси (Wyman M.) 46, 137, 177
 Уиддер (Widder D. V.) 93, 137
 Уиттекер (Whittaker E. T.) 88, 195, 240, 264
 Уиттекера уравнение 333
 — —, формулы связи для решений 335
 Уиттекера функции 333 (см. также Вырожденные гипергеометрические функции, Уиттекера уравнение)
 — — при большом значении аргумента 333, 341
 — — при большом m 333—335, 356
 Уонг (Wong R.) 137
 Урселл (Ursell F.) 177
 Фабри преобразование 295
 Федорюк М. В. 138

- Феррерс (Ferrers N. M.) 241
 Феррерса функции 235—239 (см. также Лежандра полиномы, Лежандра функции)
 Фикс (Fix G.) 292
 Франклин (Franklin J.) 93
 Френеля интегралы 63, 83
 — —, асимптотическое разложение 91
 Фробениус (Frobenius G.) 191, 195
 Фробениуса метод 195, 311
 Фукс (Fuchs L.) 185
 Функция контроля ошибки 247, 256—258, 284
 Фурье интегралы 100
 — —, асимптотическое разложение 91
 Ханделсман (Handelsman R. A.) 137, 138
 Характеристическое значение 295
 — уравнение 295
 Хартман (Hartman R.) 183, 240
 Хеткоут (Hethcote H. W.) 292, 356
 Хорн (Horn J.) 356
 Хохштадт (Hochstadt H.) 89
 Хsieh (Hsieh P.-F.) 356
 Цилиндрические функции 318 (см. также Бесселя функции)
 Цирулис Т. 137
 Чако (Chako N.) 138
 Чебышева полиномы 73
 Черри (Cherry T. M.) 285
 Шварца принцип симметрии 166
 Шмидт (Schmidt H.) 46
 Эйлер (Euler L.) 14, 87, 204
 Эйлера постоянная 51, 57, 89
 Эллиптические интегралы 205
 Эрдейи (Erdelyi A.) 40, 46, 88, 108, 114, 137, 150, 156, 292, 354, 356
 Эйри (Airey J. R.) 98
 Эйри интеграл (см. Эйри функция)
 — уравнение 77, 356
 — функция 74
 — —, асимптотические разложения 134—135, 151 — 154
 — —, дифференциальное уравнение 77
 — —, оценки 153
 — —, связь с функциями Бесселя 84
 Эрмита полиномы 69, 71, 73, 332
 Якоби лемма 235
 — полиномы 73, 212

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Книга известного американского математика профессора Ф. У. Дж. Олвера посвящена двум областям анализа — теории асимптотических разложений и теории специальных функций. Она отличается своеобразным переплетением этих теорий, обстоятельностью изложения и сравнительной элементарностью.

В США книга вышла в двух вариантах. Первый¹⁾, полный, содержащий 14 глав, во многих отношениях дополняет ряд известных монографий, посвященных асимптотике и специальным функциям.

Второй²⁾, сокращенный — первые 7 глав полного — предназначен в качестве учебного пособия для лиц, желающих начать изучение асимптотических методов и специальных функций.

Последний вариант и предлагается вниманию читателей. Удачная структура книги, интересные примеры и задачи, а также исторические сведения и литературные ссылки, содержащиеся в каждой главе, облегчают изучение книги.

Эти обстоятельства позволяют надеяться, что предлагаемый труд Ф. У. Дж. Олвера будет с интересом встречен широким кругом советских читателей — научных работников, аспирантов, инженеров и студентов высших учебных заведений.

¹⁾ Oliver F. W. J., *Asymptotics and Special Functions*. New York and London, Academic Press, 1974, 584 pp.

²⁾ Oliver F. W. J., *Introduction to Asymptotics and Special Functions*. New York and London, Academic Press, 1974, 297 pp.

ПРЕДИСЛОВИЕ К КНИГЕ «ASYMPTOTICS AND SPECIAL FUNCTIONS»

Классический анализ является основой многих ветвей прикладной математики. Цель этой книги — дать всестороннее введение в два раздела классического анализа, упомянутые в заглавии. Она адресована математикам, физикам и инженерам и может служить как основой для изучения предмета, так и справочником для научной работы. Книга базируется частично на курсе, прочитанном в Марилендском университете.

Первоначально я намеревался уделить все внимание асимптотическим методам, приводя, если это необходимо, свойства специальных функций. Этот подход был бы удовлетворительным, если бы эти функции использовались лишь в качестве иллюстрирующих примеров. Но решение более сложных задач теории асимптотических разложений, особенно связанных с равномерностью, сделало необходимым исследование специальных функций в качестве приближающих функций. По мере того, как книга писалась, становилось все яснее, что будет нереалистичным предполагать наличие у студентов достаточных знаний необходимых свойств специальных функций. Поэтому содержание книги расширено так, что асимптотическая теория теперь тесно переплетается с систематическим изложением теории наиболее важных специальных функций. Это переплетение находится в полном согласии с историческим развитием и ведет к более глубокому пониманию не только асимптотики, но также и специальных функций. Почему, например, рассматривают четыре стандартных решения дифференциального уравнения Бесселя, если любое решение можно записать в виде линейной комбинации независимой пары решений? Удовлетворительного ответа на этот вопрос нельзя дать, не будучи знакомым с асимптотической теорией линейных дифференциальных уравнений.

Второй особенностью, отличающей эту книгу от существующих монографий, является рассмотрение оценок остаточных членов, или методов получения таких оценок, для большинства приближений и разложений. Эффективные оценки имеют очевидную важность в приложениях. Они также дают возможность заглянуть в природу и в надежность асимптотических приближений, особенно когда имеется более чем одна переменная, и этим

ПРЕДИСЛОВИЕ

часто исключают необходимость в несколько неудовлетворительном понятии обобщенных асимптотических разложений. Методы анализа остаточных членов развиваются систематически лишь в течение последних десяти лет, и многие результаты, изложенные в этой книге, ранее не публиковались.

Содержание глав распределено следующим образом. В главе 1 введены основные понятия и определения асимптотической теории. Теория асимптотических разложений для определенных интегралов, содержащих параметр, изложена в главах 3, 4 и 9, для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений — в главах 6, 7, 10—13; для рядов и последовательностей — в главе 8. Специальные функции вводятся в главе 2 и их свойства излагаются в большинстве последующих глав, особенно в главах 4, 5, 7, 8, 10—12. В главе 5 дано также введение в аналитическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Наконец, в главе 14 кратко рассмотрены методы оценки остатков в асимптотических приближениях и разложениях.

Вводный курс, занимающий один семестр, может быть основан на главах 1—3, а также на первых частях глав 4—7¹⁾. Оставшимся главам можно посвятить второй семестр; отбор материала преподавателем зависит от того, на чем желательно сосредоточить внимание — на специальных функциях или на асимптотике. Предварительным требованием является хорошее знание основных понятий современного анализа и теории функций комплексной переменной. Предварительные знания обыкновенных дифференциальных уравнений полезны, но не обязательны. Курс теории функций действительной переменной не является необходимым; все встречающиеся интегралы являются интегралами Римана. Звездочка*, поставленная у номеров некоторых параграфов и пунктов, означает, что изложенный в них материал может быть пропущен без ущерба для понимания дальнейшего материала. Почти во всех главах имеются примеры и более чем 500 упражнений существенно различной сложности. Некоторые из этих упражнений являются иллюстративными, другие содержат обобщения теории или свойства специальных функций, которые важны, но выводятся непосредственно. Учащемуся настоятельно рекомендуется после изучения параграфа прочитать все упражнения, независимо от того, будет он их делать или нет. Предупреждающие звездочки* относятся к тем упражнениям, решение которых отличается повышенной трудностью или требует большой затраты времени.

Все главы заканчиваются коротким параграфом, озаглавленным «Исторические сведения и дополнительные ссылки». Здесь

¹⁾ По этой причине первые семь глав были опубликованы издательством Academic Press в виде отдельной книги (учебника) под названием «Введение в асимптотические методы и специальные функции».

указаны источники, на которых основан материал, изложенный в главе, и упомянуты работы, где можно найти дальнейшую информацию.

Библиография помещена в конце книги. Особенно я в долгу перед превосходными книгами де Брейна, Копсона, Джеффриса и Свирлс, Эрдейи, Ватсона, Уиттекера и Ватсона, а также обширными справочниками, опубликованными по проекту Бейтмена и Национальным Бюро стандартов.

Ценные замечания относительно первых вариантов книги сделали Дж. Ф. Миллер (Национальная физическая лаборатория) и Ф. Стенджер (Университет штата Ута), которые полностью прочитали рукопись, а также Р. Б. Дингл (Университет Св. Эндрюса), У. Г. Рейд (Чикагский университет) и Ф. Урсели (Манчестерский университет), прочитавшие некоторые главы. Р. Э. Аски (Висконсинский университет) прочитал окончательный вариант, и среди его полезных замечаний были различные дополнительные ссылки. Мне доставляет удовольствие выразить им всем свою благодарность; я благодарен также миссис Линде Ло, печатавшей варианты книги и помогавшей при корректуре, и сотрудникам издательства Academic Press.

Кроме того, я признателен за неустанные усилия моей жено Грейс, которая проводила все численные расчеты, печатала первоначальный вариант и помогала при чтении корректуры.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К КНИГЕ «INTRODUCTION TO ASYMPTOTICS AND SPECIAL FUNCTIONS

Эта книга содержит семь глав из книги «Асимптотические методы и специальные функции» того же автора. Она публикуется отдельно для удобства студентов, которым нужен только вводный курс. Ответы к упражнениям, ссылки, указатель обозначений и общий указатель были сокращены путем удаления информации, не относящейся к первым семи главам.

ВВЕДЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

§ 1. Происхождение асимптотических разложений

1.1. Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \cos t dt \quad (1.01)$$

при положительных действительных значениях параметра x . Попробуем вычислить его, разлагая $\cos t$ по степеням t и интегрируя полученный ряд почленно. Мы получим

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) dt = \quad (1.02)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \dots \quad (1.03)$$

Если $x > 1$, то последний ряд сходится к сумме

$$F(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

То, что попытка оказалась успешной, можно проверить, выведя полученный результат прямо из (1.01) с помощью двух интегрирований по частям; ограничение $x > 1$ при этом заменяется условием $x > 0$.

Проведем теперь ту же самую процедуру с интегралом

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt. \quad (1.04)$$

Мы получим

$$G(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} (1 - t + t^2 - \dots) dt = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots \quad (1.05)$$

Этот ряд расходится при всех конечных значениях x и поэтому представляется бессмысленным.

Почему указанная процедура привела к успеху в первом случае и была безрезультатной во втором? Ответ найти нетрудно. Разложение $\cos t$ сходится при всех значениях t ; более того, оно сходится равномерно в любом конечном интервале изменения t . Применение известной теоремы об интегрировании бесконечных рядов в бесконечном интервале¹⁾ показывает, что переход от (1.02) к (1.03) полностью оправдан при $x > 1$. Во втором же случае разложение функции $(1+t)^{-1}$ расходится при $t \geq 1$. Появление не имеющего смысла выражения в правой части формулы (1.05) можно рассматривать как следствие интегрирования ряда в интервале, в котором он не сходится равномерно.

1.2. Если бы наш подход к математическому анализу был слишком ортодоксальным, то мы могли бы ограничиться в данных примерах приведенными рассуждениями.

Предположим, однако, что мы допускаем эвристический подход, и попытаемся просуммировать ряд (1.05) численно для некоторого значения x , например, для $x = 10$.

Первые четыре члена имеют вид

$$0,1000 - 0,0100 + 0,0020 - 0,0006, \quad (1.06)$$

а соответствующая сумма равна 0,0914. И, что удивительно, эта величина очень близка к истинному значению $G(10) = 0,09156^2$.

Чтобы понять причину этого неожиданного успеха, рассмотрим разность $\varepsilon_n(x)$ между $G(x)$ и n -й частичной суммой ряда (1.05),

$$\varepsilon_n(x) = G(x) - g_n(x),$$

где

$$g_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Здесь n произвольно, а $\varepsilon_n(x)$ называется *остаточным членом* или *остатком*, а точнее, n -м остаточным членом или n -м остатком. Так как

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$

подстановка этого выражения в (1.04) дает

$$\varepsilon_n(x) = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1+t} dt. \quad (1.07)$$

¹⁾ Бромунч (1926, § 175—176). Эта теорема сформулирована полностью ниже (глава 2, теорема 8).

²⁾ Полученному при численном интегрировании (1.04) или из таблиц экспоненциальных интегралов; сравните § 3.1 главы 2.

Очевидно, что

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \int_0^{\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}. \quad (1.08)$$

Другими словами, частичные суммы ряда (1.05) приближают функцию $G(x)$ с ошибкой, численно меньшей первого отбрасываемого члена ряда. Из (1.07) видно также, что ошибка имеет знак, совпадающий со знаком этого члена ряда. Поскольку следующий член в (1.06) равен 0,00024, это полностью объясняет близость значения 0,0914 величины $g_n(10)$ к $G(10)$.

1.3. Таким образом, разложение (1.05) имеет скрытый смысл: его можно рассматривать как *последовательность приближений* $\{g_n(x)\}$ к значению $G(x)$. В этом смысле оно аналогично сходящемуся разложению, например (1.03). Поэтому на практике мы можем не вычислять бесконечное число членов сходящегося ряда; мы заканчиваем суммирование, как только убеждаемся, что вклад остатка пренебрежимо мал по сравнению с требуемой точностью. Здесь имеются, однако, два важных различия.

Во-первых, ошибку $\varepsilon_n(x)$ нельзя представить как сумму членов остатка. Во-вторых, частичная сумма сходящегося ряда становится, по определению, произвольно близкой к сумме ряда, когда число членов неограниченно возрастает. В случае (1.05) это не так: при данном значении x последовательные члены ряда $(-1)^s/x^{s+1}$ монотонно убывают до тех пор, пока s не становится больше $[x]$, целой части x . После этого они неограниченно возрастают. Поэтому частичные суммы $g_n(x)$ сначала приближают $G(x)$, но когда n превышает значение $[x]$, ошибки начинают расти и, в конце концов, очень сильно осциллировать¹⁾.

Существенное отличие состоит, таким образом, в том, что в то время как сумма сходящегося ряда может быть вычислена с произвольно большой точностью при достаточной затрате времени, точность значения $G(x)$, вычисленного с помощью частичных сумм $g_n(x)$ из (1.05), ограничена. Лучшее, что мы можем сделать при заданном значении x , это представить $G(x)$ частичной суммой $g_{[x]}(x)$. Абсолютная ошибка этого представления ограничена величиной $[x]!/x^{[x]+1}$, а относительная ошибка — приблизительно величиной $[x]!/x^{[x]}$.

Хотя точность и ограничена, она очень высока. Например, если $x = 10$, то $[x]!/x^{[x]} \approx 0,36 \cdot 10^{-32}$. Поэтому при $x \geq 10$ значение $G(x)$ можно найти из (1.05) с точностью по крайней мере до трех значащих цифр, что в некоторых случаях является достаточным. При $x \geq 100$ получаются 42 значащие цифры;

¹⁾ По этой причине ряды такого типа называют полусходящимися.

²⁾ Здесь и всюду далее знак \approx обозначает приближенное равенство.

немногие вычисления в прикладных науках требуют даже отдаленно такой точности.

До сих пор мы рассматривали поведение последовательности $\{g_n(x)\}$ при фиксированном x и изменяющемся n . Если же вместо этого фиксировать n , то можно ожидать в силу (1.08), что $g_n(x)$ даст лучшее приближение для $G(x)$, чем любая другая частичная сумма, когда x лежит в интервале $n < x < n+1$ ¹⁾. Таким образом, никакое приближение не является «лучшим» во всеобъемлющем смысле; каждое из них имеет интервал, в котором оно имеет преимущества.

1.4. Разложение (1.05) является типичным для широкого класса расходящихся рядов, получаемых из интегральных представлений, дифференциальных уравнений и, вообще всюду, где нарушаются условия, управляющие применимостью аналитических преобразований. Тем не менее в восемнадцатом веке такие разложения широко использовались в численных и аналитических расчетах многими математиками, в частности, Эйлером. В отличие от приведенных выше рассуждений относительно функции $G(x)$, тогда было мало что известно об ошибках в приближении функций такими методами, и поэтому иногда следствием были значительные неточности. В начале девятнадцатого века Абель, Коши и другие предприняли попытку поставить математический анализ на прочную основу. Одним из результатов было введение полного запрета на использование расходящихся рядов, хотя, кажется, этот шаг сопровождался некоторым сопротивлением.

В течение последовавшей половины столетия не было сделано ни одной попытки реабилитировать использование расходящихся рядов. Двумя требованиями для удовлетворительной общей теории были, во-первых, чтобы она была применима к большинству известных рядов, и, во-вторых, чтобы она допускала элементарные операции, включающие сложение, умножение, деление, подстановку, интегрирование, дифференцирование и обращение. Ни одно из требований не выполняется, если, например, мы ограничимся рассмотрением рядов, остаточные члены которых ограничены по величине первым отброшенным членом.

Но в конце концов обоим требованиям удовлетворило введенное Пуанкаре в 1886 году понятие, которое он назвал *асимптотическим разложением*. Соответствующее определение будет дано ниже в § 7.1. Как мы увидим, теория Пуанкаре охватывает широкий класс часто используемых расходящихся рядов, и все элементарные операции в ней допустимы (с некоторыми незначительными ограничениями в случае дифференцирования).

¹⁾ Поскольку (1.08) дает оценку, а не действительное значение $|g_n(x)|$, интервал, в котором $g_n(x)$ дает наилучшее приближение, может несколько отличаться от $n < x < n+1$.

§ 2. Символы \sim , o и O ¹⁾

2.1. Чтобы описать поведение при $x \rightarrow \infty$ интересующей нас функции $f(x)$ в терминах известной функции $\varphi(x)$, мы часто будем использовать следующие обозначения, введенные Бахманом и Ландау²⁾. Предположим сначала, что x — действительная переменная. На бесконечности $\varphi(x)$ может стремиться к нулю, к бесконечности или иметь какое-либо другое поведение — никаких ограничений мы не налагаем.

1) Если отношение $f(x)/\varphi(x)$ стремится к единице, то мы пишем

$$f(x) \sim \varphi(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

или, короче, $f \sim \varphi$. В этом случае мы говорим, что f асимптотически приближается к φ или φ является асимптотическим приближением функции f .

2) Если $f(x)/\varphi(x) \rightarrow 0$, мы пишем

$$f(x) = o\{\varphi(x)\} \quad (x \rightarrow \infty)$$

или, короче $f = o(\varphi)$; в этом случае мы говорим, что порядок f меньше, чем порядок φ ³⁾.

3) Если отношение $|f(x)/\varphi(x)|$ ограничено, то мы пишем

$$f(x) = O\{\varphi(x)\} \quad (x \rightarrow \infty)$$

или $f = O(\varphi)$; в этом случае говорят, что функция f имеет порядок, не превосходящий порядка φ ³⁾.

В частности, соотношение $f = o(1)$ ($x \rightarrow \infty$) просто означает, что f стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$; соотношение $f = O(1)$ ($\infty \leftarrow x$) означает, что величина $|f|$ ограничена при $x \rightarrow \infty$.

Простые примеры:

$$(x+1)^2 \sim x^2,$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = O(e^x).$$

2.2. Сравнивая 1), 2) и 3), мы замечаем, что 1) и 2) взаимно исключают друг друга. Кроме того, каждое из них является частным случаем соотношения 3) и, если применимо, несет больше информации, чем 3).

¹⁾ Эти символы определяют отношения порядка. — Прим. перев.

²⁾ Ландау (1927, т. 2, стр. 3—5).

³⁾ В случае, когда функция φ не является действительной и положительной, некоторые авторы используют в определении знак абсолютной величины, т. е. $f(x) = o(|\varphi(x)|)$. Аналогично в определении 3).

Далее, символ O иногда связывают не с предельной точкой ∞ , а с интервалом $[a, \infty)$ ¹⁾. Таким образом, соотношение

$$f(x) = O\{\varphi(x)\} \quad \text{при } x \in [a, \infty) \quad (2.01)$$

просто означает, что величина $|f(x)/\varphi(x)|$ ограничена в интервале $a \leq x < \infty$. Однако ни один из символов \sim или o нельзя использовать таким образом.

Из соотношения (2.01) вытекает существование такого числа K , что

$$|f(x)| \leq K|\varphi(x)| \quad (x \geq a), \quad (2.02)$$

причем о действительной величине K оно информации не дает. Конечно, если неравенство (2.02) выполняется для некоторого значения K , то оно также выполняется и для любого большего значения; таким образом, существует бесконечное множество возможных значений K . Наименьшую верхнюю грань значений отношения $|f(x)/\varphi(x)|$ в интервале $[a, \infty)$ мы будем называть *граничной постоянной*²⁾ в этом интервале.

2.3. Обозначения $o(\varphi)$ и $O(\varphi)$ можно также использовать для обозначения классов функций f со свойствами 2) и 3) соответственно, или просто функций с этими свойствами.

Таким образом, символ $o(\varphi)$ не обязательно означает каждый раз одну и ту же функцию f . Аналогичные соглашения применяются также для $O(\varphi)$. Например,

$$o(\varphi) + o(\varphi) = o(\varphi), \quad o(\varphi) = O(\varphi).$$

Следует отметить, что многие соотношения такого типа, включая второй пример, необратимы: равенство $O(\varphi) = o(\varphi)$ неверно. В то же время все соотношения с символами \sim обратимы.

В качестве примера приведем выражение

$$e^{ix}\{1 + o(1)\} + e^{-ix}\{1 + o(1)\} = 2\cos x + o(1). \quad (2.03)$$

Его легко проверить, представляя $e^{\pm ix}$ в виде $\cos x \pm i\sin x$ и вспоминая, что тригонометрические функции ограничены. Необходимо отметить еще тот важный момент, что правую часть соотношения (2.03) нельзя переписать в виде $2\{1 + o(1)\}\cos x$, так как это означало бы, что левая часть *точно* равна нулю, если x — нечетное кратное $\pi/2$. В общем случае это не так, поскольку функции, представленные членом $o(1)$, могут быть различными.

¹⁾ В этой книге мы принимаем стандартное обозначение (a, b) для открытого интервала $a < x < b$; $[a, b]$ — для соответствующего замкнутого интервала $a \leq x \leq b$; $(a, b]$ и $[a, b)$ для замкнутых с одной стороны интервалов $a < x \leq b$ и $a \leq x < b$ соответственно.

²⁾ В оригинале implied constant. — *Прим. перев.*

УПРАЖНЕНИЯ

2.1¹⁾. Доказать, что если v — любое фиксированное число, то $x^v = o(e^x)$ и $e^{-x} = o(x^v)$. Доказать также, что $\ln x = o(x^v)$ при $\operatorname{Re} v > 0$.

2.2. Показать, что

$$x + o(x) = O(x), \quad \{O(x)\}^2 = O(x^2) = o(x^3).$$

2.3. Показать, что

$$\cos\{O(x^{-1})\} = O(1), \quad \sin\{O(x^{-1})\} = O(x^{-1})$$

и

$$\cos\{x + \alpha + o(1)\} = \cos(x + \alpha) + o(1),$$

где α — действительная постоянная.

2.4. Верно ли соотношение

$$\{1 + o(1)\} \operatorname{ch} x - \{1 + o(1)\} \operatorname{sh} x = \{1 + o(1)\} e^{-x}?$$

2.5. Показать, что

$$O(\varphi)O(\psi) = O(\varphi\psi), \quad O(\varphi)o(\psi) = o(\varphi\psi), \quad O(\varphi) + O(\psi) = O(|\varphi| + |\psi|).$$

2.6. Чему равняется граничная постоянная в соотношениях

$$(x+1)^2 = O(x^2), \quad (x^2 - 1/2)^{1/2} = O(x), \quad x^2 = O(e^x)$$

в интервале $[1, \infty)$?

2.7. Доказать, что если $f \sim \varphi$, то $f = \{1 + o(1)\}\varphi$. Показать, что обратное справедливо, если бесконечность не является предельной точкой нулей функции φ .

2.8. Пусть $\varphi(x)$ — положительная невозрастающая функция x и $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$. С помощью предыдущего упражнения показать, что

$$\sup_{t \in (x, \infty)} f(t) \sim \varphi(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

§ 3. Символы \sim , o и O (продолжение)

3.1. Определения, введенные в § 2.1, можно обобщить несколькими способами. Например, переменная x не обязательно должна быть непрерывной; она может стремиться к бесконечности по последовательности значений. Таким образом,

$$\sin(\pi n + 1/n) = O(1/n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

при условии, что n — целые числа.

Далее, мы не обязаны ограничивать рассмотрение поведением отношения $f(x)/\varphi(x)$ лишь при $x \rightarrow \infty$; определения 1), 2) и 3) из § 2.1 применимы и в случае, когда x стремится к любой конечной точке c . Например, если $c \neq 0$, то при $x \rightarrow c$

$$(x^2 - c^2)/x^2 \sim 2(x - c)/c = O(x - c) = o(1).$$

Назовем c *выделенной точкой* асимптотического разложения.

¹⁾ В упр. 2.1—2.5 предполагается, что рассматриваются большие положительные значения независимой переменной x .

3.2. Следующее обобщение касается комплексных переменных. Пусть S — данный бесконечный сектор $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, где $\arg z$ обозначает аргумент переменной z . Предположим, что для некоторого значения R существует такое не зависящее от $\arg z$ число K , что

$$|f(z)| \leq K|\varphi(z)| \quad (z \in S(R)), \quad (3.01)$$

где $S(R)$ обозначает пересечение S с множеством $|z| \geq R$. В этом случае мы будем говорить, что $f(z) = O\{\varphi(z)\}$ при $z \rightarrow \infty$ в S или просто $f(z) = O\{\varphi(z)\}$ в $S(R)$. Таким образом, символ O автоматически подразумевает равномерность относительно $\arg z$ ¹⁾. Аналогично для символов \sim и o .

В дальнейшем определенное только что множество точек $S(R)$ мы будем называть бесконечным сектором или просто сектором. Вершины и угол сектора S будут также называться вершиной и углом сектора $S(R)$.

Наименьшее число, удовлетворяющее неравенству (3.01), называется граничной постоянной для $S(R)$. В действительности не имеется особых оснований рассматривать секторы; определения так же хорошо применимы к любой области (т. е. к множеству точек в комплексной плоскости), имеющей бесконечность или какую-нибудь другую выделенную точку в качестве предельной (ср. упр. 3.2, приведенное ниже).

3.3. В качестве важного примера использования введенных выше обозначений можно рассмотреть остаток сходящегося степенного ряда.

Теорема 3.1. Пусть ряд $\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s$ сходится при $|z| < r$. Тогда для фиксированного n

$$\sum_{s=n}^{\infty} a_s z^s = O(z^n)$$

в любом круге $|z| \leq \rho$, где $\rho < r$.

Доказательство. Пусть ρ' — любое число из интервала (ρ, r) . Тогда $a_s \rho'^s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$; следовательно, существует такая постоянная A , что

$$|a_s| \rho'^s \leq A \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$\left| \sum_{s=n}^{\infty} a_s z^s \right| \leq \sum_{s=n}^{\infty} A \frac{|z|^s}{\rho'^s} = \frac{A \rho'^{(1-n)} |z|^n}{\rho' - |z|} \leq \frac{A \rho'^{(1-n)} |z|^n}{\rho' - \rho}.$$

Теорема доказана.

¹⁾ Не все авторы используют O и два других символа в таком смысле.

Типичным примером может служить соотношение

$$\ln\{1 + O(z)\} = O(z) \quad (z \rightarrow 0).$$

3.4. Асимптотическое соотношение или отношение порядка может обладать свойствами равномерности относительно других переменных или параметров. Например, если u — параметр из интервала $[0, a]$, где a — положительная постоянная, то

$$e^{(z-u)^2} = O(e^{z^2})$$

при $z \rightarrow \infty$ в правой полуплоскости равномерно относительно u (и $\arg z$). Области с указанными свойствами часто взаимозависимы: интервал $[-a, 0]$ и левая половина z -плоскости дают другую допустимую комбинацию областей.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Пусть δ — положительная постоянная; показать, что $\operatorname{ch} z \sim e^{z/2}$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$ и что это не так в секторе $|\arg z| < \pi/2$.

3.2. Показать, что $e^{-\delta h z} = o(1)$ при $z \rightarrow \infty$ в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z \geq 0, \quad |\operatorname{Im} z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2.$$

3.3. Пусть p — фиксированное положительное число. Вычислить граничную постоянную в соотношении $e^{-z} = O(z^{-p})$ в секторе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ и показать, что она стремится в бесконечности при $\delta \rightarrow 0$.

3.4. Предположим, что $\varphi(x) > 0$, p — действительная постоянная и $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$. С помощью теоремы 3.1 показать, что $\{f(x)\}^p \sim \{\varphi(x)\}^p$ и $\ln\{f(x)\} \sim \ln\{\varphi(x)\}$, если во втором случае функция $\varphi(x)$ ограничена¹⁾ от единицы.

Показать также, что соотношение $e^{f(x)} \sim e^{\varphi(x)}$ может оказаться неверным.

3.5. Пусть x изменяется в интервале $[0, \delta]$, где δ — положительная постоянная, а $f(u, x)$ — положительная действительная функция, причем $f(u, x) = O(u)$ при $u \rightarrow 0$ равномерно относительно x . Показать, что

$$\{x + f(u, x)\}^{1/2} = x^{1/2} + O(u^{1/2})$$

при $u \rightarrow 0$ равномерно относительно x .

§ 4. Интегрирование и дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка

4.1. Асимптотические соотношения и отношения порядка можно, как правило, *интегрировать* при условии, что справедливы некоторые очевидные ограничения, касающиеся сходимости интегралов. Предположим, например, что $f(x)$ — интегрируемая

¹⁾ т. е. существует такое число $\varepsilon > 0$, что $|\varphi(x) - 1| > \varepsilon$.

Функция действительной переменной x , причем $f(x) \sim x^v$ при $x \rightarrow \infty$, где v — действительная или комплексная постоянная. Пусть a — любое конечное действительное число. Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_a^\infty f(t) dt \sim -x^{v+1}/(v+1) \quad (\operatorname{Re} v < -1), \quad (4.01)$$

$$\int_a^x f(t) dt \sim \begin{cases} c & (\operatorname{Re} v < -1), \\ \ln x & (v = -1), \\ x^{v+1}/(v+1) & (\operatorname{Re} v > -1), \end{cases} \quad (4.02)$$

где c — постоянная величина.

Докажем, например, третье соотношение из (4.02). Имеем $f(x) = x\{1 + \eta(x)\}$, где $|\eta(x)| < \varepsilon$, если $x > X > 0$, причем X выбирается по произвольно заданному положительному числу ε . Следовательно, если $x > X$, то

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^X f(t) dt + \frac{1}{v+1}(x^{v+1} - X^{v+1}) + \int_X^x t^v \eta(t) dt$$

и поэтому

$$\frac{v+1}{x^{v+1}} \int_a^x f(t) dt - 1 = \frac{v+1}{x^{v+1}} \int_a^X f(t) dt - \frac{X^{v+1}}{x^{v+1}} + \frac{v+1}{x^{v+1}} \int_X^x t^v \eta(t) dt.$$

Первые два члена в правой части последнего равенства стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$, а третий член ограничен числом $\frac{|v+1|\varepsilon}{1 - \operatorname{Re} v}$. Отсюда вытекает искомое соотношение.

Формулы (4.01) и (4.02) непосредственно обобщаются на интегралы в комплексной области.

4.2. Дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка не всегда допустимо. Например, если $f(x) = x + \cos x$, то $f(x) \sim x$ при $x \rightarrow \infty$, но утверждение, что $f'(x) \sim 1$, неверно. Для того чтобы дифференцирование было возможно, необходимы дополнительные условия. Для действительных переменных эти условия можно сформулировать в терминах монотонности производной.

Теорема 4.1¹⁾. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $f(x) \sim x^p$ при $x \rightarrow \infty$, где $p (\geq 1)$ — постоянная. Тогда если $f'(x)$ — неубывающая функция при всех достаточно больших значениях x , то $f'(x) \sim px^{p-1}$.

¹⁾ Де Брейн (1961, § 7.3).

Доказательство. Имеем $f(x) = x^p \{1 + \eta(x)\}$, где $|\eta(x)| \leq \varepsilon$ при $x > X$, X — некоторое положительное число, ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Если $h > 0$, то

$$\begin{aligned} hf'(x) &\leq \int_x^{x+h} f'(t) dt = f(x+h) - f(x) = \\ &= \int_x^{x+h} pt^{p-1} dt + (x+h)^p \eta(x+h) - x^p \eta(x) \leq \\ &\leq hp(x+h)^{p-1} + 2\varepsilon(x+h)^p. \end{aligned}$$

Положим $h = \varepsilon^{1/2}x$. Тогда

$$f'(x) \leq px^{p-1} \{ (1 + \varepsilon^{1/2})^{p-1} + 2p^{-1}\varepsilon^{1/2}(1 + \varepsilon^{1/2})^p \} \quad (x > X).$$

Аналогично,

$$f'(x) \geq px^{p-1} \{ (1 - \varepsilon^{1/2})^{p-1} - 2p^{-1}\varepsilon^{1/2} \} \quad \left(x > \frac{X}{1 - \varepsilon^{1/2}} \right).$$

Теорема доказана.

Другой результат этого типа установлен ниже в упр. 4.4. Следует, однако, отметить, что условие монотонности $f'(x)$ часто трудно проверить, поскольку $f'(x)$ и является той функцией, свойства которой требуется установить.

4.3. В комплексной плоскости дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка обычно допустимо в подобластях области, где они справедливы. Важным частным случаем является следующая теорема.

Теорема 4.2¹⁾. Пусть функция $f(z)$ голоморфна²⁾ в области, содержащей замкнутый сектор S , и

$$f(z) = O(z^p) \quad (\text{или } f(z) = o(z^p)) \quad (4.03)$$

при $z \rightarrow \infty$ в S , где p — любое фиксированное действительное число. Тогда

$$f^{(m)}(z) = O(z^{p-m}) \quad (\text{или } f^{(m)}(z) = o(z^{p-m})) \quad (4.04)$$

при $z \rightarrow \infty$ в любом замкнутом секторе S , лежащем строго внутри S и имеющем ту же вершину.

Доказательство основано на интегральной формуле Коши для m -й производной аналитической функции

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(t) dt}{(t-z)^{m+1}}, \quad (4.05)$$

где путь \mathcal{C} — окружность, обходящая точку $t = z$.

¹⁾ Ритт (1918).

²⁾ То есть аналитична.

Существенной причиной того, что точку z нужно в конечном результате считать принадлежащей внутренности области, является необходимость проведения пути \mathcal{C} в S .

Так как $|z - \text{const}|^p \sim |z|^p$, то вершину сектора S можно без потери общности взять в начале координат. Пусть S определен неравенствами $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, $|z| \geq R$; рассмотрим сектор S' , заданный условиями

$$\alpha + \delta \leq \arg z \leq \beta - \delta, \quad |z| \geq R',$$

где δ — положительный острый угол и $R' = \frac{R}{1 - \sin \delta}$ (рис. 4.1). Выбирая δ достаточно малым, мы можем добиться, чтобы сектор S содержал S' . Возьмем в формуле

(4.05) путь \mathcal{C} в виде $|t - z| =$
 $= |z| \sin \delta$. Тогда

$$|z| (1 - \sin \delta) \leq |t| \leq |z| (1 + \sin \delta).$$

Следовательно, $t \in S$, если $z \in S'$. Кроме того, если K — граничная постоянная в (4.03) для S , то

$$|f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{(|z| \sin \delta)^m} K |z|^p (1 \pm \sin \delta)^p,$$

где верхний или нижний знаки выбираются соответственно условиям $p \geq 0$ или $p < 0$. В любом случае $f^{(m)}(z)$ имеет порядок $O(z^{p-m})$, что и требовалось доказать. Доказатель-

ство в случае, когда символ O в (4.03) заменен на o , аналогично.

Мы попутно показали, что граничная постоянная в формуле (4.04) в секторе S' не превосходит $m! (\cos \delta)^m (1 \pm \sin \delta)^p K$, но поскольку эта оценка стремится к бесконечности при $\delta \rightarrow 0$, мы не можем сделать вывод, что формула (4.04) справедлива в S .

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Показать, что если функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) = o\{\varphi(x)\}$ при $x \rightarrow \infty$, где $\varphi(x)$ — положительная неубывающая функция x , то $\int_a^x f(t) dt = o\{x\varphi(x)\}$.

4.2. Можно ожидать, что в случае $\operatorname{Re} \nu = -1$, $\operatorname{Im} \nu \neq 0$, результат, соответствующий (4.02), имеет вид $\int_a^x f(t) dt = O(1)$. Показать, что это неверно, на примере функции $f(x) = x^{\mu-1} + (x \ln x)^{-1}$, где μ — действительно.

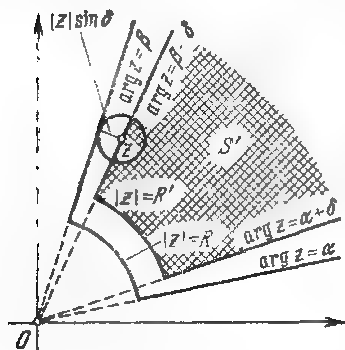


Рис. 4.1. Секторы S, S' .

4.3. Пусть u и x лежат в интервале $[1, \infty)$; показать, что

$$\int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 + t + u^2)^{1/2}} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{u^2}{x^3}\right).$$

4.4. Предположим, что $f(x) = x^2 + O(x)$ при $x \rightarrow \infty$, а $f'(x)$ непрерывна и не убывает при всех достаточно больших x . Показать, что $f'(x) = 2x + O(x^{-1})$.

4.5. Предположим, что вместо условия (4.03) справедливо соотношение $f(z) \sim z^\nu$, где ν — ненулевая действительная или комплексная постоянная. Вывести из теоремы 4.2, что $f'(z) \sim \nu z^{\nu-1}$ при $z \rightarrow \infty$ в \mathbb{C} .

4.6. Пусть T и T' обозначают полуполосы

$$\begin{aligned} T: \alpha &\leq \operatorname{Im} z \leq \beta, & \operatorname{Re} z &\geq \rho, \\ T': \alpha + \delta &\leq \operatorname{Im} z \leq \beta - \delta, & \operatorname{Re} z &\geq \rho, \end{aligned}$$

где $0 < \delta < \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна в T и $f(z) = O(e^z)$ при $z \rightarrow \infty$ в T . Показать, что $f'(z) = O(e^z)$ при $z \rightarrow \infty$ в T' .

4.7. Показать, что результат упражнения 4.6 останется справедливым, если оба члена $O(e^z)$ заменить на $O(z^p)$, где p — действительная постоянная. Показать затем, что соотношение $f'(z) = O(z^{p-1})$ неверно, на примере функции $z^p e^{iz}$.

§ 5. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений: действительные переменные

5.1. Рассмотрим уравнение

$$x + \operatorname{th} x = u,$$

в котором u — действительный параметр. Левая часть уравнения является строго возрастающей функцией x . Следовательно, для каждого значения u существует точно один действительный корень $x(u)$ (в этом легко убедиться графически). Каково асимптотическое поведение $x(u)$ при больших положительных значениях u ?

Если x велико, поведение левой части определяется первым членом. Поэтому мы переносим $\operatorname{th} x$ в правую часть и рассматриваем его как «поправку»:

$$x = u - \operatorname{th} x.$$

Так как $|\operatorname{th} x| < 1$, то отсюда следует, что

$$x(u) \sim u \quad (u \rightarrow \infty). \quad (5.01)$$

Это — первое асимптотическое приближение для корня. Результат немедленно улучшается, если вспомнить, что $\operatorname{th} x = 1 + o(1)$

при $x \rightarrow \infty$; таким образом,

$$x = u - 1 + o(1) \quad (u \rightarrow \infty). \quad (5.02)$$

Чтобы получить следующие приближения, мы разложим $\operatorname{th} x$ в ряд, удобный при больших x , а именно:

$$\operatorname{th} x = 1 - 2e^{-2x} + 2e^{-4x} - 2e^{-6x} + \dots \quad (x > 0)$$

и снова выразим x через u . Из (5.02) видно, что $e^{-2x} = O(e^{-2u})^1$. Отсюда с помощью теоремы 3.1 получаем

$$x = u - 1 + O(e^{-2x}) = u - 1 + O(e^{-2u}).$$

Следующий шаг дает

$$\begin{aligned} x &= u - 1 + 2 \exp\{-2u + 2 + O(e^{-2u})\} + O(e^{-4x}) = \\ &= u - 1 + 2^{-2u+2} + O(e^{-4u}). \end{aligned} \quad (5.03)$$

Продолжение этого процесса дает последовательность приближений с ошибками, асимптотический порядок которых постоянно убывает. Сходимость этой последовательности при неограниченном возрастании числа шагов на основе проведенных рассуждений увидеть трудно, но численные возможности этого процесса можно оценить, взяв, например, $u = 5$ и не учитывая ошибку $O(e^{-4u})$ в (5.03). Мы найдем, что $x = 4.0006709, \dots$, в то время как точное значение, полученное стандартными численными методами²⁾, равно 4.0006698...

5.2. Второй пример, характеризующий тот же самый подход, касается отыскания больших положительных корней уравнения

$$x \operatorname{tg} x = 1.$$

Это уравнение можно обратить следующим образом:

$$x = n\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

где n — целое число, а арктангенс принимает главное значение. Так как в этом случае он изменяется в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, мы находим, что $x \sim n\pi$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее, если $x > 1$, то

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \dots$$

¹⁾ Следует отметить, что это соотношение нельзя вывести прямо из (5.01).

²⁾ Оценка остатка для (5.03) указана ниже в упр. 5.3.

Следовательно, $x = n\pi + O(1/x) = n\pi + O(n^{-1})$. Следующие две подстановки дают

$$x = n\pi + \frac{1}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad x = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3(n\pi)^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

и так далее.

5.3. В качестве третьего примера рассмотрим уравнение

$$x^2 - \ln x = u, \quad (5.04)$$

в котором u — снова большой положительный параметр. Этот пример отличается от предыдущих тем, что «поправка» $\ln x$ не ограничена при $x \rightarrow \infty$. Чтобы разобраться с уравнением (5.04) и с аналогичными уравнениями, мы установим следующий простой общий результат.

Теорема 5.1. Пусть функция $f(\xi)$ непрерывна, строго возрастает в интервале $a < \xi < \infty$ и

$$f(\xi) \sim \xi \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (5.05)$$

Обозначим через $\xi(u)$ корень уравнения

$$f(\xi) = u, \quad (5.06)$$

лежащий в интервале (a, ∞) , когда $u > f(a)$. Тогда

$$\xi(u) \sim u \quad (u \rightarrow \infty). \quad (5.07)$$

Графическое рассмотрение показывает, что корень $\xi(u)$ единствен, возрастает и неограничен при $u \rightarrow \infty$. Из (5.05) и (5.06) имеем $u = \{1 + o(1)\}\xi$ при $\xi \rightarrow \infty$, и поэтому также и при $u \rightarrow \infty$. Деление на $1 + o(1)$ дает тогда соотношение $\xi = \{1 + o(1)\}u$, эквивалентное (5.07).

5.4. Вернемся к примеру (5.04). В нем $\xi = x^2$ и $f(\xi) = \xi - (\ln \xi)/2$. Поэтому функция $f(\xi)$ строго возрастает при $\xi > 1/2$, и из теоремы следует, что $\xi \sim u$ при $u \rightarrow \infty$; таким образом,

$$x = u^{1/2}\{1 + o(1)\} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Подставляя это приближение в правую часть уравнения

$$x^2 = u + \ln x, \quad (5.08)$$

и вспоминая, что $\ln\{1 + o(1)\} = o(1)$, мы получаем

$$x^2 = u + \frac{1}{2} \ln u + o(1),$$

откуда (теорема 3.1)

$$x = u^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\ln u}{4u} + o\left(\frac{1}{u}\right) \right\}.$$

Как и в §§ 5.1 и 5.2, подстановки можно продолжать неограниченно и получить для решения асимптотическое разложение любого порядка.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Доказать, что корень уравнения $x \operatorname{tg} x = u$, лежащий в интервале $(0, \pi/2)$, имеет вид

$$x = \frac{\pi}{2} (1 - u^{-1} + u^{-2}) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{24} \right) u^{-3} + O(u^{-4}) \quad (u \rightarrow \infty).$$

5.2. Показать, что большие положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$ даются асимптотической формулой

$$x = \mu - \mu^{-1} - \frac{2}{3} \mu^{-3} + O(\mu^{-5}) \quad (\mu \rightarrow \infty),$$

где $\mu = (n + 1/2)\pi$, а n — положительное целое число.

5.3. Показать, что в примере из § 5.1 при $u > 0$ справедливо соотношение

$$x = u - 1 + 2\theta_1 e^{-2u+2},$$

и, следовательно,

$$x = u - 1 + 2e^{-2u+2} - 10\theta_2 e^{-4u+4},$$

где θ_1 и θ_2 — некоторые числа из интервала $(0, 1)$.

5.4. Пусть $M(x) \cos \theta(x) = \cos x + o(1)$ и $M(x) \sin \theta(x) = \sin x + o(1)$ при $x \rightarrow \infty$, где функция $M(x)$ положительна, а $\theta(x)$ — действительна и непрерывна. Доказать, что

$$M(x) = 1 + o(1), \quad \theta(x) = x + 2m\pi + o(1),$$

где m — целое число.

5.5. Доказать, что при большом положительном u действительные корни уравнения $xe^{1/x} = e^u$ имеют вид

$$x = \frac{1}{u} - \frac{\ln u}{u^2} + \frac{(\ln u)^2}{u^3} + O\left(\frac{\ln u}{u^3}\right),$$

$$x = e^u - 1 - \frac{1}{2} e^{-u} + O(e^{-2u}).$$

5.6. (Оценка остаточного члена для теоремы 5.1.) Пусть ξ — положительная переменная и $f(\xi)$ — строго возрастающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|f(\xi) - \xi| < k\xi^{-p},$$

где k и p — положительные постоянные. Показать, что если $u > 0$ и если можно найти такое положительное число $\delta \in (0, 1)$, для которого $\delta(1-\delta)^p \geq ku^{-p-1}$, то положительный корень уравнения $f(\xi) = u$ лежит в интервале $(u - u\delta, u + u\delta)$. Вывести отсюда, что если l — произвольное число, превосходящее k , то корень удовлетворяет неравенству

$$|\xi - u| < kl^p \{(l - k)u\}^{-p}$$

при условии $u > l(l - k)^{-p/(p+1)}$.

5.7. Показать, что при больших u положительный корень уравнения $x \ln x = u$ дается формулой

$$x(u) \sim \frac{u}{\ln u}.$$

Показать также, что при $u > e$

$$\frac{u}{\ln u} < x(u) < \left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{u}{\ln u}.$$

§ 6. Асимптотическое решение трансцендентных уравнений: комплексные переменные

6.1. Предположим теперь, что $f(z)$ — аналитическая функция комплексной переменной z , голоморфная в области, содержащей замкнутый сектор S с вершиной в начале координат и углом, меньшим 2π . Допустим, что

$$f(z) \sim z \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } S). \quad (6.01)$$

Тогда соотношение

$$u = f(z) \quad (6.02)$$

отображает S на некоторую неограниченную область U . Существенная трудность при установлении результата, аналогичного теореме 5.1, состоит в том, что нужно наложить на z и u такие условия, чтобы эти переменные были связаны взаимно однозначно.

Теорема 6.1. Пусть S_1 и S_2 — замкнутые секторы с вершинами в начале координат, причем S_1 лежит строго внутри заданного сектора S , а S_2 лежит строго внутри S_1 .

1) Если граничные дуги секторов S_1 и S_2 имеют достаточно большой радиус, то уравнение (6.02) имеет точно один корень $z(u)$ в S_1 при любом $u \in S_2$.

2) $z(u) \sim u$ при $u \rightarrow \infty$ на S_2 .

Для доказательства положим

$$f(z) = z + \xi(z).$$

Из (6.01) и теоремы Ритта (§ 4.3) следует, что $\xi'(z) = o(1)$ при $z \rightarrow \infty$ в S_1 . Пусть z_1 и z_2 — две любые различные точки сектора S_1 , причем $|z_1| \leq |z_2|$. Тогда

$$f(z_2) - f(z_1) = (1 + \vartheta)(z_2 - z_1), \quad (6.03)$$

где $\vartheta = \{\xi(z_2) - \xi(z_1)\} / (z_2 - z_1)$.

6.2. Первый шаг состоит в доказательстве того, что если радиус a_1 граничной дуги сектора S_1 достаточно велик, то $|\vartheta| < 1$ для всех z_1 и z_2 из S_1 . Очевидно,

$$|\vartheta| = \left| \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} \xi'(t) dt \right| \leq \frac{l(z_1, z_2)}{|z_2 - z_1|} \delta,$$

где δ — максимальное значение (обязательно конечное) функции $|\xi'(z)|$ в S_1 , а $l(z_1, z_2)$ — длина пути интегрирования.

Рис. 6.1 показывает, что в некоторых случаях мы не можем интегрировать вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2 , оставаясь при этом внутри S_1 ; на рисунке $\theta_1 = \arg z_1$ и $\theta_2 = \arg z_2$. Однако мы всегда можем взять в качестве пути интегрирования дугу окружности \mathcal{C} с центром в $t = 0$ и проходящую от z_1 до $z_3 \equiv |z_1|e^{i\theta_2}$ вместе с отрезком \mathcal{J} , соединяющим z_3 и z_2 . Так как угол $z_1 z_3 O$ во всех случаях меньше, чем $\pi/2$, обе величины $|z_3 - z_1|$ и $|z_3 - z_2|$ ограничены величиной $|z_2 - z_1|$. Обозначая угол сектора S_1 через σ , имеем

$$\frac{l(z_1, z_2)}{|z_2 - z_1|} \leq \frac{\text{длина } \mathcal{J}}{|z_3 - z_2|} + \frac{\text{длина } \mathcal{C}}{|z_3 - z_1|} = 1 + \frac{|\theta_2 - \theta_1|}{2 \sin \left| \frac{1}{2} \theta_2 - \frac{1}{2} \theta_1 \right|} < k,$$

где $k = 1 + (\sigma/2) \operatorname{cosec} \sigma/2$, причем значение k конечно, поскольку $\sigma < 2\pi$.

Таким образом, $|\vartheta| \leq k\delta$. При $a_1 \rightarrow \infty$ мы имеем $\delta \rightarrow 0$. Следовательно, $|\vartheta| < 1$ при достаточно больших a_1 , что и требовалось доказать.

6.3. Ссылка на формулу (6.03) показывает, что $f(z_1) \neq f(z_2)$. Поэтому функция (6.02) конформно отображает S_1 на некоторую область U_1 переменной u .

Рассмотрим границы U_1 . Для больших $|z|$ имеем

$$\arg \{f(z)\} = \arg z + \arg \{1 + z^{-1}\xi(z)\} = \arg z + o(1).$$

Следовательно, в окрестности бесконечности U_1 содержит S_2 . Другая граница U_1 соответствует дуге $|z| = a_1$. На этой дуге

$$|f(z)| = a_1 |1 + z^{-1}\xi(z)| \leq 2a_1$$

при достаточно больших a_1 . Поэтому сектор S_2 целиком содержится в U_1 при условии, что радиус его граничной дуги достаточно велик. Этим установлено утверждение 1).

Чтобы доказать 2), заметим, что для заданного $\varepsilon (> 0)$ число a_1 можно выбрать таким образом, чтобы

$$|z^{-1}\xi(z)| < \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}$$

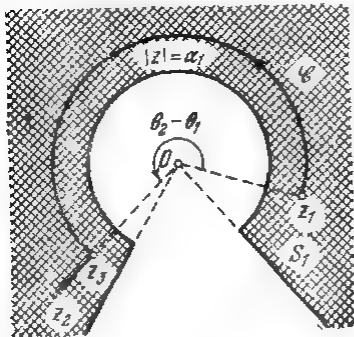


Рис. 6.1. z -плоскость.

при $z \in S_1$. Тогда

$$\left| \frac{z(u)}{u} - 1 \right| = \left| \frac{z^{-1}z(z)}{1 + z^{-1}z(z)} \right| < \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)^{-1}}{1 - \varepsilon(\varepsilon + 1)^{-1}} = \varepsilon.$$

Условие $z(u) \in S_1$ может быть удовлетворено для всех $u \in S_2$, если снова выбрать a_2 достаточно большим. Доказательство теоремы 6.1 тем самым завершено.

УПРАЖНЕНИЕ

6.1. Показать, что если m — целое число или нуль, то в секторе $(m - 1/2)\pi \leq \arg z \leq (m + 1/2)\pi$ большие значения нулей функции $z \operatorname{tg} z - \ln z$ даются формулой

$$z = n\pi e^{m\pi i} \left[1 + \frac{\ln(n\pi) - m\pi i}{(n\pi)^2} + O\left\{\frac{(\ln n)^3}{n^4}\right\} \right],$$

где n — большое положительное целое число.

§ 7. Определение и основные свойства асимптотических разложений

7.1. Пусть $f(z)$ — функция действительной или комплексной переменной z , $\sum a_n z^n$ — формальный степенной ряд (сходящийся или расходящийся), а $R_n(z)$ — разность между $f(z)$ и n -й частичной суммой этого ряда; таким образом,

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + R_n(z). \quad (7.01)$$

Предположим, что для каждого фиксированного значения n

$$R_n(z) = O(z^{-n}) \quad (7.02)$$

при $z \rightarrow \infty$ в некоторой неограниченной области R . Тогда, следуя Пуанкаре (1886), мы будем говорить, что ряд $\sum a_n z^{-n}$ является *асимптотическим разложением* функции $f(z)$ и записывать это в виде ¹⁾

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } R). \quad (7.03)$$

Мы будем называть z *асимптотической переменной*, а граничную постоянную в формуле (7.02) — n -й *граничной постоянной* асимптотического разложения в области R .

¹⁾ Здесь смысл символа \sim отличается от смысла, который ему придавался в §§ 2 и 3. Чтобы избежать возможных недоразумений, некоторые авторы используют символ \approx для асимптотических разложений и оставляют \sim для асимптотических приближений.

Если соотношение (7.02) выполняется только при $n \leq N$, или, в более общем случае, если $R_n(z) = o(1/z^{n-1})$ при $n \leq N$, то мы говорим, что (7.03) является *асимптотическим разложением до N -го члена*. Однако мы будем предполагать, что наличие такого ограничения всегда будет отмечаться особо.

Из теоремы 3.1 (с заменой z на $1/z$) видно, что если ряд $\sum_n a_n z^{-n}$ сходится при всех достаточно больших $|z|$, то он является асимптотическим разложением его суммы, определенной обычным образом, без всяких ограничений на $\arg z$. Естественно, однако, что наибольший интерес представляют асимптотические разложения, которые расходятся. Примером служит разложение (1.05); оно является следствием оценки (1.08).

7.2. Теорема 7.1. Для того чтобы функция $f(z)$ обладала асимптотическим разложением вида (7.03), необходимо и достаточно, чтобы для каждого неотрицательного целого числа n

$$z^n \left\{ f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} \right\} \rightarrow a_n \quad (7.04)$$

при $z \rightarrow \infty$ в \mathbf{R} равномерно относительно $\arg z$.

Очевидно, что из (7.04) следует (7.02); это — достаточное условие. Чтобы проверить необходимость, напомним в силу (7.01) и (7.02)

$$z^n R_n(z) = z^n \left\{ \frac{a_n}{z^n} + R_{n+1}(z) \right\} \rightarrow a_n \quad (z \rightarrow \infty).$$

Это соотношение эквивалентно (7.04).

Сформулируем следствия, непосредственно вытекающие из теоремы 7.1.

1) (Свойство единственности). Для заданной функции $f(z)$ и области \mathbf{R} существует самое большее одно разложение вида (7.03).

2) n -я граничная постоянная в формуле (7.03) для области \mathbf{R} не может быть меньше, чем $|a_n|$.

7.3. Утверждение, обратное следствию 1) из § 7.2, неверно. Рассмотрим асимптотическое разложение функции e^{-z} в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta < \pi/2$. Так как для любого n имеем $z^n e^{-z} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ в этой области, соотношение (7.04) дает $a_n = 0$ при $n = 0, 1, \dots$. Таким образом,

$$e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \frac{0}{z^2} + \dots \quad (|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta). \quad (7.05)$$

Пусть теперь a_0, a_1, a_2, \dots обозначает любую заданную последова-

тельность постоянных. Если существует¹⁾ хотя бы одна такая функция $f(z)$, что

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } |\arg z| \leq (\pi/2) - \delta),$$

то существует и бесконечное число таких функций, так как соотношение $z^n e^{-z} \rightarrow 0$ слева показывает, что к функции $f(z)$ можно добавить функцию e^{-z} , умноженную на произвольную постоянную, не меняя при этом коэффициентов разложения.

Отсутствие единственности для функции, представленной асимптотическим разложением, находится в резком контрасте со свойством единственности суммы сходящегося ряда. Мы использовали сектор $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ для иллюстрации; другие секторы (с конечными углами) можно рассмотреть, используя вместо e^{-z} функцию $\exp(-z^p)$, где p — подходящим образом выбранная положительная постоянная.

7.4. Может случиться, что хотя функция $f(z)$ и не имеет асимптотического разложения вида (7.03) в данной области, отношение $f(z)/\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — заданная функция, обладает таким разложением. В этом случае мы пишем

$$f(z) \sim \varphi(z) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}.$$

Исключая случай, когда $a_0 = 0$, главный член $a_0 \varphi(z)$ дает асимптотическое приближение для $f(z)$ в смысле §§ 2 и 3:

$$f(z) \sim a_0 \varphi(z).$$

Аналогичным образом, если разность $f(z) - \varphi(z)$ имеет асимптотическое разложение $\sum a_s z^{-s}$, то мы пишем

$$f(z) \sim \varphi(z) + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}.$$

Примером такого разложения служит аналитическая функция $f(z)$, имеющая полюс в бесконечно удаленной точке; если порядок полюса равен n , то $\varphi(z)$ — многочлен от z степени n .

7.5. В ситуации, упомянутой в последнем предложении, асимптотические разложения сходятся при достаточно больших z . Этот результат является не таким частным, как это может показаться.

Теорема 7.2. Пусть $f(z)$ — однозначная голоморфная функция в окрестности бесконечно удаленной точки с выколотой

¹⁾ Позднее (§ 9) мы увидим, что это условие всегда выполняется.

самой этой точкой и

$$f(z) \sim \sum_{s=-n}^{\infty} \frac{a_s}{z^s} \quad (7.06)$$

при $z \rightarrow \infty$ для всех $\arg z$, где n — фиксированное целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Тогда это разложение сходится во всей окрестности, и $f(z)$ является его суммой.

Для доказательства предположим, что $|z| > R$ — данная окрестность и

$$f(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{b_s}{z^s}$$

— соответствующий ряд Лорана. Этот ряд сходится при $|z| > R$

$$b_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{s-1} dz \quad (7.07)$$

для любого значения r , большего R . Из (7.06) имеем $f(z) = O(z^{-n})$ при $z \rightarrow \infty$. Полагая $r \rightarrow \infty$ в (7.07), мы находим, что b_s обращается в нуль при $s < n$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{b_s}{z^s}.$$

Это сходящееся разложение является также и асимптотическим (теорема 3.1), и поскольку асимптотическое разложение функции $f(z)$ единственно, то отсюда следует, что $a_s = b_s$. Доказательство закончено.

7.6. Результат, сформулированный в этом пункте, вытекает непосредственно из теоремы 7.2.

Теорема 7.3. Пусть функция $f(z)$ однозначна и голоморфна в окрестности бесконечно удаленной точки с выколотой самой этой точкой. Предположим, что соотношение (7.06) выполняется в замкнутом секторе S , а также что это разложение расходится для всех конечных z . Тогда угол сектора S меньше, чем 2π , и $f(z)$ имеет существенно особую точку на бесконечности.

Необходимо подчеркнуть, что теоремы 7.2 и 7.3 применимы только к однозначным функциям. Если $f(z)$ имеет на бесконечности точку ветвления, то она может иметь расходящееся асимптотическое разложение в области изменения аргумента, большей, чем 2π .

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Показать, что определение асимптотического разложения останется тем же, если мы заменим (7.02) на

$$R_n(z) = o(1/z^{n-p}) \quad (n = N, N+1, \dots),$$

где p — любое фиксированное положительное число, а N — любое неотрицательное целое число.

7.2. Показать, что ни одна из функций $z^{-1/2}$, $\sin z$ и $\ln z$ не имеет асимптотического разложения вида (7.03).

7.3. Построить пример однозначной функции, которая имеет существенную особую точку на бесконечности и сходящееся асимптотическое разложение в секторе

$$|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta < \pi/2.$$

§ 8. Операции над асимптотическими разложениями

8.1. 1) Из асимптотических разложений можно составлять линейные комбинации. Предположим, что

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{-s}, \quad g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} g_s z^{-s}$$

при $z \rightarrow \infty$ в областях F и G соответственно. Тогда, если λ и μ — постоянные, то

$$\lambda f(z) + \mu g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (\lambda f_s + \mu g_s) z^{-s} \\ (z \rightarrow \infty \text{ в } F \cap G).$$

Это соотношение вытекает непосредственно из определения.

2) Асимптотические разложения можно перемножать. Это означает, что

$$f(z)g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} h_s z^{-s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F \cap G),$$

где

$$h_s = f_0 g_s + f_1 g_{s-1} + f_2 g_{s-2} + \dots + f_s g_0.$$

Действительно, если $F_n(z)$, $G_n(z)$ и $H_n(z)$ обозначают остаточные члены, относящиеся к n -м частичным суммам разложений $f(z)$, $g(z)$ и $f(z)g(z)$ соответственно, то

$$H_n(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} G_{n-s}(z) + g(z) F_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

3) *Асимптотические разложения можно делить друг на друга.* Пусть $f_0 \neq 0$ и значение $|z|$ достаточно велико; тогда

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f_0 + F_1(z)} = \\ = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{f_0^{s+1}} \left\{ \frac{f_1}{z} + \dots + \frac{f_{n-1}}{z^{n-1}} + F_n(z) \right\}^s + \frac{(-1)^n \{F_1(z)\}^n}{f_0^n \{f_0 + F_1(z)\}}.$$

Поскольку $F_1(z) = O(z^{-1})$ и $F_n(z) = O(z^{-n})$, то отсюда следует

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{k_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

где $f_0^{s+1}k_s$ — многочлен относительно f_0, f_1, \dots, f_s . Так как n произвольно, это означает, что асимптотическое разложение $1/f(z)$ существует.

Коэффициенты k_s можно найти указанным способом, однако в случае сходящегося степенного ряда их удобнее вычислять из рекуррентных соотношений

$$f_0 k_s = -(f_1 k_{s-1} + f_2 k_{s-2} + \dots + f_s k_0) \quad (s = 1, 2, \dots),$$

полученных с помощью тождества $f(z) \{1/f(z)\} = 1$. Первые четыре коэффициента имеют вид

$$k_0 = 1/f_0, \quad k_1 = -f_1/f_0^2, \\ k_2 = (f_1^2 - f_0 f_2)/f_0^3, \quad k_3 = (-f_1^3 + 2f_0 f_1 f_2 - f_0^2 f_3)/f_0^4.$$

Необходимые изменения в случае $f_0 = 0$ не представляют трудности.

8.2. 4) *Асимптотические разложения можно интегрировать.* Предположим, что для всех достаточно больших значений положительной действительной переменной x функция $f(x)$, действительная или комплексная, непрерывна и имеет асимптотическое разложение вида

$$f(x) = f_0 + \frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x^2} + \dots$$

Если не выполняется условие $f_0 = f_1 = 0$, то мы не можем интегрировать $f(t)$ в интервале $x \leq t < \infty$, поскольку получающиеся интегралы расходятся. Однако выражение $f(t) - f_0 - f_1 t^{-1}$ имеет порядок $O(t^{-2})$ при больших t и поэтому интегрируемо. Интегрируя остаточный член и используя результаты § 4.1, мы находим, что

$$\int_x^\infty \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt \sim \frac{f_2}{x} + \frac{f_3}{2x^2} + \frac{f_4}{3x^3} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Если a — произвольно выбранное положительное число, то

$$\int_a^x f(t) dt = \left(\int_a^\infty - \int_x^\infty \right) \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt + f_0(x-a) + \\ + f_1 \ln \frac{x}{a} \sim A + f_0 x + f_1 \ln x - \frac{f_2}{x} - \frac{f_3}{2x^2} - \frac{f_4}{3x^3} - \dots$$

при $x \rightarrow \infty$, где

$$A = \int_0^\infty \left\{ f(t) - f_0 - \frac{f_1}{t} \right\} dt - f_0 a - f_1 \ln a.$$

Эти результаты можно обобщить на аналитические функции комплексной переменной, голоморфные, например, в секторе. При этом используемая ветвь логарифма должна быть непрерывной.

8.3. 5) Дифференцирование асимптотического разложения возможно не всегда. Например¹⁾, если $f = e^{-x} \sin e^x$, а значения x действительны и положительны, то

$$f(x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Но $f'(x) \equiv \cos e^x - e^{-x} \sin e^x$ осциллирует при $x \rightarrow \infty$ и поэтому в силу теоремы 7.1 не имеет асимптотического разложения вида (7.03).

Дифференцирование допустимо, если известно, что $f'(x)$ — непрерывная функция и ее асимптотическое разложение существует. Это утверждение можно доказать, интегрируя (§ 8.2) разложение для $f'(x)$ и используя свойство единственности (§ 7.2).

Другая система условий, при которых дифференцирование законно, относится к случаю, когда $f(z)$ — аналитическая функция комплексной переменной z . В качестве следствия из теоремы 4.2 нетрудно вывести, что асимптотическое разложение $f(z)$ можно дифференцировать сколько угодно раз в любом секторе, лежащем строго внутри первоначального сектора справедливости разложения и имеющем ту же вершину.

8.4. В заключение мы рассмотрим операцию обращения. Она возможна и для действительных, и для комплексных переменных; для иллюстрации мы ограничимся вторым случаем.

Пусть функция $\xi(z)$ голоморфна в области, содержащей замкнутый сектор S с вершиной в начале координат и углом, меньшим 2π ; предположим, что

$$\xi(z) \sim z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } S).$$

¹⁾ Бромвич (1926, стр. 345).

Пусть S_1 и S_2 — замкнутые секторы с вершинами в начале координат, причем S_1 лежит строго внутри S , а S_2 лежит строго внутри S_1 . Теорема 6.1 показывает, что если $\zeta \in S_2$, то существует единственная точка z в S_1 (при условии, что значения $|\zeta|$ достаточно велики), такая, что

$$z = \{1 + o(1)\}\zeta \quad (\zeta \rightarrow \infty \text{ в } S_2).$$

Начиная с этого приближения и повторно подставляя следующие приближения в правую часть соотношения

$$z = \zeta - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + O\left(\frac{1}{z^n}\right),$$

где n — произвольное целое число, мы видим, что существует представление вида

$$z = \zeta - b_0 - \frac{b_1}{\zeta} - \frac{b_2}{\zeta^2} - \dots - \frac{b_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\zeta^n}\right) \quad (\zeta \rightarrow \infty \text{ в } S_2),$$

где коэффициенты b_i являются многочленами относительно a_i , не зависящими от количества сделанных приближений. Это и требовалось доказать.

Можно проверить, что первые четыре коэффициента имеют вид¹⁾

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_0 a_1 + a_2, \quad b_3 = a_0^2 a_1 + a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_3.$$

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Пусть K_n и L_n являются n -ми граничными постоянными в асимптотическом разложении функций $f(z)$ и $1/f(z)$ соответственно, указанных в § 8.1, а m — точная нижняя грань $|f(z)|$ в F . Показать, что

$$L_n \leq m^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} |k_s| K_{n-s} \quad (n \geq 1).$$

8.2. (Подстановка асимптотических разложений.) Пусть

$$f \equiv f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^{-s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

$$z = z(t) \sim t + \sum_{s=0}^{\infty} b_s t^{-s} \quad (t \rightarrow \infty \text{ в } T).$$

¹⁾ Для любого s число sb_s является коэффициентом при z^{-1} в асимптотическом разложении функции $\{\zeta(z)\}^s$ по убывающим степеням z . Это вытекает из формулы Лагранжа обращения степенных рядов; см., например, Копсон (1935, § 6.23).

Показать, что если образ T содержится в F , то f допускает разложение вида

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} c_s t^{-s} \quad (t \rightarrow \infty \text{ в } T),$$

где $c_0 = f_0$, $c_1 = f_1$, $c_2 = f_2 - f_1 b_0$, $c_3 = f_3 - 2f_2 b_0 + f_1 (b_0^2 - b_1)$.

8.3. Предположим, в обозначениях § 8.1, что $f_0 = 1$. Доказать, что

$$\ln \{f(z)\} \sim \sum_{s=1}^{\infty} \frac{l_s}{z^s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

где $l_1 = f_1$ и

$$sl_s = sf_s - (s-1)f_1 l_{s-1} - (s-2)f_2 l_{s-2} - \dots - f_{s-1} l_1 \quad (s \geq 2).$$

8.4. Пользуясь обозначениями § 8.1, показать, что если $f_0 = 1$, а v — действительная или комплексная постоянная, то

$$\{f(z)\}^v \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{p_s}{z^s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } F),$$

где $p_0 = 1$ и

$$sp_s = (v-s+1)f_1 p_{s-1} + (2v-s+2)f_2 p_{s-2} + \dots + \{(s-1)v-1\}f_{s-1} p_1 + sv f_s p_0.$$

§ 9. Функции, имеющие заданные асимптотические разложения

9.1. Пусть a_0, a_1, a_2, \dots — бесконечная последовательность произвольных чисел, действительных или комплексных, а R — неограниченная область. Существует ли функция, имеющая формальный ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (9.01)$$

своим асимптотическим разложением при $z \rightarrow \infty$ в R ? Ответ, несколько неожиданный, заключается в том, что такая функция существует всегда, без всяких условий.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{s=0}^{v(|z|)} \frac{a_s}{z^s}, \quad (9.02)$$

где $v(|z|)$ — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{v(|z|)}| + v(|z|) \leq |z|. \quad (9.03)$$

Очевидно, что $v(|z|)$ — неубывающая функция $|z|$. Пусть n —

произвольное положительное целое число и

$$z_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n+1}| + n + 1.$$

Если $|z| \geq z_n$, то $v(|z|) \geq n+1$, $|z| > 1$ и

$$\left| f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} \right| = \left| \sum_{s=n}^{v(|z|)} \frac{a_s}{z^s} \right| \leq \frac{|a_n|}{|z|^n} + \frac{1}{|z|^{n+1}} \sum_{s=n+1}^{v(|z|)} |a_s|. \quad (9.04)$$

Из (9.03) видно, что правая часть (9.04) ограничена величиной $(|a_n| + 1)/z^n$; следовательно, ряд (9.01) является асимптотическим разложением функции $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ в любой неограниченной области.

Найденное решение задачи не единственно. Например, если мы изменим определение функции $v(|z|)$, заменив правую часть неравенства (9.03) на $k|z|$, где k — любая положительная постоянная, то функция (9.02) снова будет иметь (9.03) своим асимптотическим разложением. Бесконечное множество всех функций, имеющих (9.04) в качестве асимптотического разложения, называется *асимптотической суммой* этого ряда в \mathbf{R} .

9.2. Функция (9.02) является в некоторой степени искусственной конструкцией в том смысле, что она разрывна на бесконечном множестве окружностей. Мы построим теперь *аналитическую* функцию с требуемыми свойствами. Единственным условием будет ограниченность области изменения $\arg z$.

Предположим, что область \mathbf{R} является замкнутым сектором, который мы обозначим через \mathbf{S} и который предварительным переносом начала координат и поворотом z -плоскости совмещен с сектором $|\arg z| \leq \sigma$, $|z| \geq a$. На положительные числа σ и a не налагается никаких ограничений. Мы докажем, что подходящая функция имеет вид

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s e_s(z)}{z^s}, \quad (9.05)$$

где

$$e_s(z) = 1 - \exp(-z^p b^s / |a_s|),$$

ρ и b — любые фиксированные числа, удовлетворяющие условиям $0 < \rho < \pi/(2\sigma)$ и $0 < b < a$. Если какое-либо из чисел a_s равно нулю, соответствующая функция $e_s(z)$ также берется равной нулю.

Непосредственно из этих определений следует, что

$$|\arg(z^p)| = |\rho \arg z| \leq \rho \sigma < \pi/2.$$

Поэтому

$$\left| \frac{a_s e_s(z)}{z^s} \right| \leq \lambda b^s |z|^{\rho-s} \leq \lambda |z|^{\rho} \left(\frac{b}{a} \right)^s, \quad (9.06)$$

где λ — точная верхняя грань функции $|(1-e^{-t})/t|$ в правой половине t плоскости. Очевидно, что значение λ конечно. В силу существования мажорирующего сходящегося ряда ряд из аналитических функций (9.05) равномерно сходится в любом компактном¹⁾ множестве в S . Следовательно, функция $f(z)$ голоморфна в S .

Докажем, что $f(z)$ имеет заданное асимптотическое разложение. Пусть n — произвольное положительное целое число. Тогда

$$f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} = - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} \exp\left(-\frac{z^p b^s}{|a_s|}\right) + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{a_s e^s(z)}{z^s}.$$

Вследствие неравенства (9.06) бесконечная сумма имеет порядок $O(z^{p-n})$. Экспоненциальные множители в конечной сумме в правой части равенства имеют меньший асимптотический порядок, и поэтому

$$f(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} = O\left(\frac{1}{z^{n-p}}\right) \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } S).$$

Заменяя n на $n + [\rho] + 1$, мы видим, что член с символом O можно усилить до $O(1/z^n)$. Это и есть искомый результат.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Пусть $\{a_s\}$ — произвольная последовательность действительных или комплексных чисел, а $\{\alpha_s\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, таких, что ряд $\sum \alpha_s$ сходится. Определим последовательность $\{b_s\}$ условиями $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$ и $b_s = a_s - c_s$ ($s \geq 2$), где c_s — коэффициент перед z^{-s} в разложении рациональной функции

$$\sum_{j=1}^{s-1} \frac{b_j \alpha_j}{|b_j| + \alpha_j z} \frac{1}{z^{j-1}}$$

по убывающим степеням z . Показать, что в секторе $|\arg z| \leq \pi/2$, $|z| \geq 1$, функция

$$f(z) = b_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s \alpha_s}{|b_s| + \alpha_s z} \frac{1}{z^{s-1}}$$

голоморфна и

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (z \rightarrow \infty).$$

¹⁾ Компактное означает ограниченное и замкнутое.

§ 10. Обобщения определения Пуанкаре

10.1. Определение асимптотического разложения, данное в § 7.1, можно обобщить в нескольких направлениях.

Прежде всего, совсем не обязательно ограничиваться рассмотрением бесконечно удаленной точки. Аналогичные определения можно сформулировать и в случае, когда переменная z стремится к любой конечной точке c , если заменить z на $(z-c)^{-1}$. Итак, пусть R — заданная область, имеющая предельную точку c (не обязательно принадлежащую R). Предположим, что для любого фиксированного n

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots + a_{n-1}(z-c)^{n-1} + O\{(z-c)^n\}$$

при $z \rightarrow \infty$ в R . Тогда мы будем писать

$$f(z) \sim a_0 + a_1(z-c) + a^2(z-c)^2 + \dots \quad (z \rightarrow c \text{ в } R). \quad (10.01)$$

Результаты §§ 7 и 8 переносятся на новые определения с очевидными видоизменениями.

Точка c называется *выделенной точкой* асимптотического разложения (ср. § 3.1). Рассматривая прежде всего случай $c = \infty$, мы следовали историческому прецеденту, а также исходили из того, что бесконечность является естественной выделенной точкой во многих физических приложениях.

10.2. Следующее обобщение приводит к рядам, отличным от степенных. Пусть R — снова заданное множество точек, имеющее c в качестве конечной или бесконечной предельной точки. Предположим, что $\{\varphi_s(z)\}$, $s = 0, 1, \dots$, — последовательность функций, определенных в R и таких, что для каждого s

$$\varphi_{s+1}(z) = o\{\varphi_s(z)\} \quad (z \rightarrow c \text{ в } R). \quad (10.02)$$

В этом случае говорят, что $\{\varphi_s(z)\}$ является *асимптотической последовательностью* или *шкалой*, и утверждают

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s \varphi_s(z) \quad (z \rightarrow c \text{ в } R) \quad (10.03)$$

означает, что для каждого неотрицательного целого числа n

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \varphi_s(z) + O\{\varphi_n(z)\} \quad (z \rightarrow c \text{ в } R).$$

Многие из свойств обычных разложений Пуанкаре справедливы и для разложений типа (10.03). Исключения составляют умножение и деление: бесконечное множество функций $\varphi_r(z)\varphi_s(z)$ с двумя индексами не всегда можно упорядочить так, чтобы оно образовало шкалу¹⁾.

¹⁾ Условия, при которых умножение возможно, были получены Эрдейи (1962, § 1.5).

10.3. Только что сформулированное определение все еще является недостаточно общим во многих отношениях. Например, ряд

$$\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 2x}{x^2} + \frac{\cos 3x}{x^3} + \dots$$

равномерно сходится, когда $x \in [a, \infty)$, если $a > 1$, и главные члены определяют поведение его суммы при $x \rightarrow \infty$. Такой ряд выпадает из рассмотрения, поскольку отношение двух любых последовательных членов неограничено при $x \rightarrow \infty$. Ряды этого типа охватываются следующим определением.

Пусть $\{\varphi_s(z)\}$ — шкала при $z \rightarrow c$ в \mathbf{R} , а $f(z)$, $f_s(z)$, $s = 0, 1, \dots$ — такие функции, что для каждого неотрицательного числа n

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} f_s(z) + O\{\varphi_n(z)\} \quad (z \rightarrow c \text{ в } \mathbf{R}). \quad (10.04)$$

В этом случае мы будем говорить, что $\sum f_s(z)$ — *обобщенное асимптотическое разложение относительно шкалы $\{\varphi_s(z)\}$* , и писать

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_s(z); \quad \{\varphi_s(z)\} \text{ при } z \rightarrow c \text{ в } \mathbf{R}.$$

Если $f(z)$, $f_s(z)$ и (возможно) $\varphi_s(z)$ — функции, зависящие от параметра (или от совокупности параметров) u , а члены с символами o и O в (10.02) и (10.04) равномерны относительно u в некотором множестве точек U , то говорят, что обобщенное разложение справедливо *равномерно* относительно u в U .

Требуется соблюдать большую осторожность при выкладках с обобщенными асимптотическими разложениями, поскольку на них переносятся только некоторые из свойств разложений Пуанкаре. Например, для данной области \mathbf{R} , выделенной точки c и шкалы $\{\varphi_s(z)\}$ функция $f(z)$ может или не иметь ни одного обобщенного разложения или иметь бесконечное множество таких разложений: нам достаточно лишь преобразовать любое из разложений, добавив к некоторым членам разложения произвольные кратные следующих членов. Вследствие этого не существует никакого аналога формулы (7.04) для вычисления членов разложения.

Далее, нельзя сделать вывод об эффективности разложения только по виду шкалы. Предположим, например, что

$$f(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{x^s}; \quad \{x^{-s}\} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (10.05)$$

(Другими словами, имеется обычное разложение Пуанкаре.)

Простая перегруппировка членов дает

$$f(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{a_{2s}}{x^{2s}} + \frac{a_{2s+1}}{x^{2s+1}} \right); \quad \{x^{-2s}\} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (10.06)$$

Нельзя, очевидно, утверждать, что разложение (10.06) более сильное, чем (10.05), хотя его шкала и убывает как квадрат шкалы для первого из разложений.

Наконец, определение допускает разложения, не имеющие практического значения в аналитическом или численном смысле, если иметь в виду функции, которые они представляют. Например,

$$\frac{\sin x}{x} \sim \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s! e^{-\frac{(s+1)x}{2s}}}{(\ln x)^s}; \quad \{(\ln x)^{-s}\} \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (10.07)$$

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Пусть S и S_δ обозначают секторы $\alpha < \arg z < \beta$ и $\alpha + \delta \leq \arg z \leq \beta - \delta$ соответственно. Показать, что если функция $f(z)$ голоморфна в пересечении S с окрестностью точки $z = 0$ и

$$f(z) \sim a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

при $z \rightarrow 0$ в S_δ для δ такого, что $0 < \delta < (\beta - \alpha)/2$, то $f^{(n)}(z) \rightarrow n! a_n$ при $z \rightarrow 0$ в S_δ .

10.2. Используя теорему Тейлора, доказать следующее обращение утверждения из упражнения 10.1.

Предположим, что функция $f(z)$ голоморфна в S при всех достаточно малых $|z|$ и для каждого n предел $\lim \{f^{(n)}(z)\}$ существует равномерно относительно $\arg z$ при $z \rightarrow 0$ в S_δ .

Обозначив этот предел через $n!a_n$, доказать, что

$$f(z) \sim a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (z \rightarrow 0 \text{ в } S_\delta).$$

10.3. Пусть λ — действительная постоянная, превосходящая единицу. С помощью предыдущего упражнения и теоремы Абеля о непрерывности суммы степенного ряда¹⁾ доказать, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\lambda^{\frac{s}{\nu}}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=n}^{\infty} \binom{s}{n} \frac{1}{\lambda^{\frac{s}{\nu}}} \right\} (z-1)^n$$

при $z \rightarrow 1$ между двумя хордами единичного круга, пересекающимися в точке $z = 1$ [Дэйвис, 1953].

10.4. Пусть x — действительная переменная, а $\{\varphi_s(x)\}$ — последовательность положительных непрерывных функций, образующих шкалу, когда x стремится к конечной точке c . Показать, что интегралы $\int_c^x \varphi_s(t) dt$ образу-

¹⁾ См., например, Титчмарш (1951, § 7.61).

ют шкалу при $x \rightarrow c$ и что если $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая разложение

$$f(x) \sim \sum a_s \varphi_s(x) \quad (x \rightarrow c),$$

то

$$\int_c^x f(t) dt \sim \sum a_s \int_c^x \varphi_s(t) dt \quad (x \rightarrow c).$$

§ 11. Анализ остаточных членов; вариационный оператор

11.1. В этой главе мы видели, как определение Пуанкаре асимптотического разложения придает эффективный аналитический смысл вычислениям с широким классом формальных степенных рядов. Это определение привело к появлению новой ветви анализа, которая со времени Пуанкаре непрерывно развивается и находит все более широкое применение.

Важность и успехи этой теории (и ее позднейших обобщений) не вызывают сомнений, но у нее есть один существенный недостаток: она затрагивает лишь вопросы существования. Она не зависит от численных значений граничных постоянных и не дает о них никакой информации. Поэтому, следуя ван дер Корпуту (1956), мы называем теорию Пуанкаре *чисто асимптотической*, для того чтобы отличить ее от широкого термина *асимптотика*, который используется для характеристики всех аспектов развития и использования асимптотических приближений и разложений.

В этой книге мы будем заниматься и чистой асимптотикой и анализом остаточных членов. При вычислении граничных постоянных часто будет использоваться *вариационный оператор* \mathcal{V} , к определению и изучению свойств которого мы теперь переходим.

11.2. В теории функций действительной переменной *вариацией* или, точнее, *полной вариацией* функции $f(x)$ в конечном или бесконечном интервале (a, b) называется точная верхняя грань выражения

$$\sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)|$$

при любых n и всех возможных способах разбиения

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

где x_0 и x_n принадлежат замыканию (a, b) . Если эта верхняя грань конечна, то $f(x)$ называется функцией *ограниченной вариации* в (a, b) ; мы будем обозначать точную верхнюю грань через $\mathcal{V}_{a,b}\{f(x)\}$, $\mathcal{V}_{a,b}(f)$ или просто $\mathcal{V}(f)$.

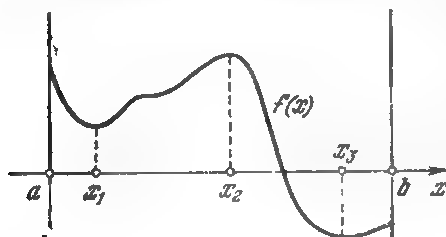
11.3. В случае компактного интервала $[a, b]$ один из возможных способов разбиения задается условием $n=1$, $x_0=a$ и $x_1=b$. Тогда

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \geq |f(b) - f(a)|.$$

Равенство выполняется, когда функция $f(x)$ монотонна в $[a, b]$:

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) = |f(b) - f(a)|. \quad (11.01)$$

Последнее соотношение указывает простой метод вычисления вариации непрерывной функции с конечным числом максимумов и минимумов: мы разбиваем $[a, b]$ в точках максимума и ми-



нимума и к каждому из подынтервалов применяем формулу (11.01). Например, в случае функции, изображенной на рис. 11.1, мы видим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{a,b}(f) &= \{f(a) - f(x_1)\} + \\ &+ \{f(x_2) - f(x_1)\} + \{f(x_2) - \\ &- f(x_3)\} + \{f(b) - f(x_3)\} = \\ &= f(a) - 2f(x_1) + 2f(x_2) - \\ &- 2f(x_3) + f(b). \end{aligned}$$

Рис. 11.1. Вариация непрерывной функции.

Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в $[a, b]$, то применение теоремы о среднем значении дает

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)| &= \sum_{s=0}^{n-1} (x_{s+1} - x_s) |f'(\xi_s)| \\ (x_s < \xi_s < x_{s+1}). \end{aligned}$$

Из непрерывности функции $f'(x)$ вытекает непрерывность $|f'(x)|$. Поэтому в силу определения интеграла Римана

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) = \int_a^b |f'(x)| dx. \quad (11.02)$$

11.4. Предположим теперь, что интервал (a, b) конечен или бесконечен, функция $f(x)$ непрерывна в замыкании (a, b) , производная $f'(x)$ непрерывна внутри (a, b) , а функция $|f'(x)|$ интегрируема в (a, b) . Используя обозначения § 11.2 и результаты § 11.3, получаем

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \geq \mathcal{V}_{x_1, x_{n-1}}(f) = \int_{x_1}^{x_{n-1}} |f'(x)| dx.$$

Так как x_1 и x_{n-1} — произвольные точки из (a, b) , то

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \geq \int_a^b |f'(x)| dx. \quad (11.03)$$

Кроме того,

$$\sum_{s=0}^{n-1} |f(x_{s+1}) - f(x_s)| = \sum_{s=0}^{n-1} \left| \int_{x_s}^{x_{s+1}} f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |f'(x)| dx,$$

и, следовательно, выполняется неравенство, обратное (11.03). Таким образом, и в этом случае формула (11.02) справедлива.

11.5. До сих пор предполагалось, что функция $f(x)$ действительна. Если $f(x)$ — комплексная функция действительной переменной x , то ее вариация определяется формулой (11.02), если этот интеграл сходится.

Предположим, например, что $f(z)$ — голоморфная функция z в комплексной области D^1). Пусть D содержит путь (контур) \mathcal{P} , т. е. конечную цепочку регулярных (или гладких) дуг, каждая из которых имеет уравнение вида

$$z = z(\tau) \quad (\alpha < \tau < \beta),$$

где τ — дуговой параметр, а производная $z'(\tau)$ непрерывна и не обращается в нуль в замыкании (α, β) . Тогда

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{\alpha}^{\beta} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \{f'(z(\tau))\} z'(\tau) | d\tau \right|.$$

Для заданной пары концевых точек вариация функции $f(z)$, очевидно, зависит от выбранного пути, чем она существенно отличается от интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} f(z) d\tau$.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Доказать, что

$$\mathcal{V}(f+g) \leq \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g), \quad \mathcal{V}(f) \geq \mathcal{V}(|f|).$$

Показать также, что равенство во втором соотношении справедливо в случае, когда функция f действительна и непрерывна.

11.2. Вычислять:

- 1) $\mathcal{V}_{0,1} \{\sin^2 n\pi x\}$, где n — целое число;
- 2) $\mathcal{V}_{-1,1}(f)$, где f — ступенчатая функция, заданная условиями $f=0$ ($x < 0$), $f=1/2$ ($x=0$), $f=1$ ($x > 0$);

¹⁾ В данном случае термин «область» обозначает открытое связное множество.

$$3) \mathcal{V}_{-\infty, \infty} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right);$$

$$4) \mathcal{V}_{x=0, \infty} \left\{ \int_0^{\infty} (t-1) e^{-t} dt \right\}.$$

11.3. Вычислить $\mathcal{V}_{-1, 1}(e^{iz})$: 1) вдоль отрезка, соединяющего -1 и 1 ; 2) вдоль трех сторон квадрата с вершинами в точках -1 , 1 , $1+2i$, $-1+2i$; 3) вдоль пути, сопряженного указанному в 2).

11.4. Пусть, в обозначениях § 11.5, путь \mathcal{P} разбит точками z_0, z_1, \dots, z_n , расположенными в указанной последовательности. Показать, что

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}}(f) = \sup \sum_{s=0}^{n-1} |f(z_{s+1}) - f(z_s)|$$

для всех n и всех возможных способов разбиения, если функция $z''(\tau)$ непрерывна на каждой дуге пути \mathcal{P} .

Исторические сведения и дополнительные ссылки

§ 1.4. Детали, касающиеся истории вопросов, изложенных в этом пункте, были взяты из книги Бромунча (1926, § 104). Дальнейшая информация содержится в этой книге.

§§ 4—6. Относительно дальнейших результатов, касающихся интегрирования и дифференцирования асимптотических соотношений и отношений порядка, а также асимптотических решений трансцендентных уравнений см. де Брейя (1961), Берг (1968), Дьедонне (1968) и Риекстыньш (1968). Результат, содержащийся в теореме 6.1, до сих пор, возможно, так явно сформулирован не был.

§ 9. Построения, проведенные в § 9.1, § 9.2 и упр. 9.1, принадлежат ван дер Корпуту (1956, теорема 1), Ритту (1916) и Карлеману (1926, глава 5) соответственно. Обзор дальнейших построений был дан Дэйвисом (1953) и Питтнауэром (1969). Относительно проблемы единственности см. Ватсон (1911) и Дэйвис (1957). Хотя эти результаты представляют большой теоретический интерес, используются на практике они редко.

§ 10.3. Это обобщение было дано Шмидтом (1937). Относительно дальнейших обобщений см. Эрдейи и Уаймен (1963) и Риекстыньш (1966). Пример (10.07) взят из последней из указанных работ.

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Гамма-функция

1.1. Гамма-функция возникла как решение задачи интерполяции факториальной функции. Можно ли найти функцию $\Gamma(x)$, имеющую непрерывные производные всех порядков в $[1, \infty)$ и обладающую свойствами $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$? Ответ утвердителен; в действительности требуются дополнительные условия для того, чтобы функция $\Gamma(x)$ была единственной. Мы не будем касаться формулировки этих условий, так как более простым отправным пунктом для наших целей является *интеграл Эйлера*¹⁾

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad (1.01)$$

в котором путь интегрирования проходит по действительной оси, а t^{z-1} принимает главное значение.

Если δ и Δ — произвольные положительные постоянные и $\delta \leq \operatorname{Re} z \leq \Delta$, то

$$|t^{z-1}| \leq t^{\delta-1} \quad (0 < t \leq 1), \quad |t^{z-1}| \leq t^{\Delta-1} \quad (t \geq 1).$$

Поэтому интеграл (1.01) сходится равномерно относительно z в этой полосе. Из этого результата и нижеследующей теоремы вытекает голоморфность функции $\Gamma(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Теорема 1.1²⁾. Пусть t — действительная переменная, изменяющаяся в конечном или бесконечном интервале (a, b) , а z — комплексная переменная, изменяющаяся в области D . Предположим, что функция $f(z, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(z, t)$ непрерывна по совокупности переменных;
- 2) для каждого фиксированного значения t функция $f(z, t)$ голоморфна по z ;

¹⁾ Или, более точно, интеграл Эйлера второго рода; интеграл Эйлера первого рода определен ниже формулой (1.11).

²⁾ Эта теорема является обобщением на комплексные переменные обычной теоремы о дифференцировании по параметру интеграла с бесконечными пределами; относительно доказательства см., например, Титчмарш (1951), 2.83, 2.84.

3) интеграл

$$F(z) = \int_a^b f(z, t) dt$$

сходится равномерно на *обоих* пределах¹⁾ на любом компактном множестве в D .

Тогда функция $F(z)$ голоморфна в D , и ее производные всех порядков можно получить дифференцированием под знаком интеграла.

1.2. Если $z = n$, n — положительное целое число, то интеграл (1.01) можно вычислить с помощью повторного интегрирования по частям. Мы получим, что

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.02)$$

Но для произвольного значения z интеграл нельзя вычислить в замкнутом виде в элементарных функциях.

Однократное интегрирование по частям в (1.01) приводит к основной рекуррентной формуле

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.03)$$

Эта формула не только удобна при вычислениях, она также позволяет продолжить $\Gamma(z)$ аналитически в левую полуплоскость. Функция $\Gamma(z)$ остается неопределенной лишь в точках $0, -1, -2, \dots$. Они и являются особыми точками $\Gamma(z)$.

Выясним природу особых точек; из разложения Тейлора имеем

$$\Gamma(z+1) = 1 + zf(z),$$

где $f(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки $z = 0$. Поэтому

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z = (1/z) + f(z).$$

Таким образом, точка $z = 0$ является простым полюсом с вычетом, равным 1. В общем случае, если n — любое положительное целое число, то можно убедиться, что

$$\Gamma(z-n) = \frac{1 + zf(z)}{z(z-1)\dots(z-n)} = \frac{(-1)^n}{n!z} \{1 + zf(z)\} \{1 + zg(z)\},$$

¹⁾ Т. е. найдутся такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, что интегралы $\int_a^{a+\varepsilon} f(z, t) dt$,
 $\int_{b-\delta}^b f(z, t) dt$ сходятся равномерно.

где $g(z)$ — функция, аналитическая в точке $z = 0$. Поэтому единственными особыми точками $\Gamma(z)$ являются простые полюсы в $z = 0, -1, -2, \dots$, причем вычет в точке $z = -n$ равен $(-1)^n/n!$

1.3. Другое определение $\Gamma(z)$, не ограниченное полуплоскостью $\operatorname{Re} z > 0$, может быть получено из (1.01) следующим образом. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t/n)^n = e^{-t},$$

мы можем рассматривать гамма-функцию как предельное значение интеграла

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n (1 - t/n)^n t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

при $n \rightarrow \infty$; z фиксировано.

Сначала мы вычислим $\Gamma_n(z)$ в случае, когда n — положительное целое число. Повторное интегрирование по частям приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z) &= \\ &= \frac{1}{z} \frac{n-1}{(z+1)n} \frac{n-2}{(z+2)n} \cdots \frac{1}{(z+n-1)n} \int_0^n t^{z+n-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \end{aligned} \quad (1.04)$$

Теперь мы докажем, что предел $\Gamma_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равен $\Gamma(z)$. Положим

$$\Gamma(z) - \Gamma_n(z) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad I_2 = \int_0^{n/2} \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} t^{z-1} dt, \\ I_3 &= \int_{n/2}^n \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} t^{z-1} dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что $I_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для I_2 и I_3 при $t \in [0, n]$

$$\ln \{(1 - t/n)^n\} = n \ln (1 - t/n) = -t - T,$$

где

$$T = \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3n^2} + \frac{t^4}{4n^3} + \dots$$

Следовательно,

$$(1 - t/n)^n = e^{-t-T} \leq e^{-t},$$

поскольку $T \geq 0$. В соответствии с этим,

$$|I_3| \leq \int_{n/2}^n e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1} dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Для I_2 справедливо неравенство $t/n \leq 1/2$. Поэтому $T \leq ct^2/n$, где

$$c = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \dots,$$

c — конечное число. Вследствие этого

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t/n)^n = e^{-t} (1 - e^{-t}) \leq e^{-t} T \leq e^{-t} ct^2/n$$

и

$$|I_2| \leq \frac{c}{n} \int_0^{n/2} e^{-t} t^{\operatorname{Re} z + 1} dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

В результате этих вычислений мы приходим к предельной формуле Эйлера:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}. \quad (1.05)$$

Условие $\operatorname{Re} z > 0$, принятое при доказательстве, может быть ослаблено до $z \neq 0, -1, -2, \dots$ с помощью рекуррентной формулы (1.03) следующим образом. Если $\operatorname{Re} z \in (-m, -m+1]$, где m — произвольное фиксированное положительное целое число, то

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1) \dots (z+m-1)} = \frac{1}{z(z+1) \dots (z+m-1)} \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m)! (n-m)^{z+m}}{(z+m)(z+m+1) \dots (z+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned}$$

1.4. Чтобы привести предельную формулу к стандартной, или канонической, форме бесконечного произведения, нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Последовательность чисел*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

стремится к конечному пределу при $n \rightarrow \infty$.

Так как функция t^{-1} убывает, то при $n \geq 2$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

Поэтому $1/n < u_n < 1$. Далее,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < 0.$$

Таким образом, $\{u_n\}$ — последовательность убывающих положительных чисел, и лемма тем самым доказана.

Предельное значение последовательности u_n называется *постоянной Эйлера* и обычно обозначается через γ . Из приведенного доказательства видно, что $0 \leq \gamma < 1$. Численный расчет дает, с точностью до десяти десятичных знаков, значение

$$\gamma = 0,57721\ 56649.$$

Предположим временно, что $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда соотношения (1.04) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_n(z)} &= \\ &= z \exp \left\{ z \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \right\} \prod_{s=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{z}{s} \right) e^{-z/s} \right\}. \end{aligned}$$

Полагая $n \rightarrow \infty$, мы получаем искомое бесконечное произведение в виде

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{yz} \prod_{s=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{s} \right) e^{-z/s} \right\}. \quad (1.06)$$

Этот результат справедлив и в случае, когда z равно нулю или отрицательному целому числу, поскольку в этих точках обе части равенства обращаются в нуль.

Логарифмируя это равенство, легко показать, что правая часть формулы (1.06) равномерно сходится в любой компактной области, не содержащей точек $z = 0, -1, -2, \dots$. Поэтому она определяет в такой области голоморфную функцию. Мы уже показали, что в исключенных точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы и, следовательно, функция $1/\Gamma(z)$ голоморфна в их окрестности. Поэтому $1/\Gamma(z)$ является *целой функцией*. Отсюда в качестве следствия вытекает, что $\Gamma(z)$ *не имеет нулей*.

1.5. С помощью предельной формулы Эйлера легко проверяются два важных тождества:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z \quad (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.07)$$

и

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\pi^{1/2}} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2) \quad (2z \neq 0, -1, -2, \dots), \quad (1.08)$$

В случае (1.07) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{z(z+1) \dots (z+n)(1-z)(2-z) \dots (n+1-z)}{n! n^z} \frac{1}{n! n^{1-z}} \right\} = \\ &= z \prod_{s=1}^{\infty} (1 - z^2/s^2) = \sin \pi z / \pi. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно получаем, что

$$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}; \quad (1.09)$$

значение $-\pi^{1/2}$ не подходит в силу условий (1.01) или (1.05).

В случае (1.08) имеем

$$\begin{aligned} \frac{2^{2z} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2)}{\Gamma(2z)} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^{2z} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \frac{n! n^{z+1/2}}{(z+1/2)(z+3/2) \dots (z+n+1/2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2z(2z+1) \dots (2z+2n)}{(2n)!(2n)^{1/2}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)! n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Последняя величина не зависит от z и должна быть конечной, поскольку левая часть существует. Если положить $z = 1/2$ в левой части и воспользоваться равенством (1.09), то можно убедиться, что она равна $2\pi^{1/2}$. Отсюда и вытекает соотношение (1.08).

Равенство (1.07) называется *формулой отражения*, а равенство (1.08) — *формулой удвоения аргумента* или *формулой умножения*. Формула отражения дает возможность выводить свойства гамма-функции отрицательного аргумента (или, в более общем случае, аргумента с отрицательной действительной частью) непосредственно из свойств для положительного аргумента (или для аргумента с положительной действительной частью).

График функции $\Gamma(x)$ для действительных значений x приведен на рис. 1.1.

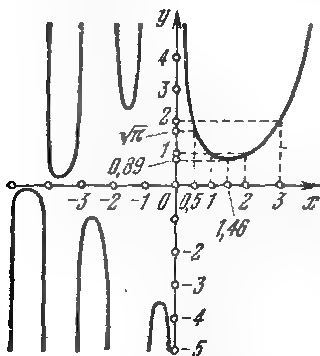


Рис. 1.1. Гамма-функция $y = \Gamma(x)$.

1.6. Теперь мы выведем формулу произведения двух гамма-функций $\Gamma(p)$ и $\Gamma(q)$. Предположим сначала, что $p \geq 1$ и $q \geq 1$.

Из (1.01) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \left(\int_0^R e^{-y} y^{p-1} dy \right) \left(\int_0^R e^{-x} x^{q-1} dx \right) \right\} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} e^{-x-y} x^{q-1} y^{p-1} dx dy,\end{aligned}$$

где S_R обозначает квадрат $x, y \in [0, R]$. Повторный интеграл равен двойному, так как подынтегральное выражение непрерывно по обоим переменным. Пусть теперь T_R обозначает треугольник, ограниченный осями и прямой $x + y = R$. Очевидно, что

$$\iint_{S_{R/2}} < \iint_{T_R} < \iint_{S_R}.$$

Поскольку интегралы по $S_{R/2}$ и S_R имеют одно и то же предельное значение, то

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{T_R} e^{-x-y} x^{q-1} y^{p-1} dx dy.$$

Перейдем к новым переменным u и v с помощью замены

$$x + y = u, \quad y = uv.$$

В плоскости переменных x, y линии уровня переменной u параллельны гипотенузе треугольника T_R . А поскольку $y/x = v/(1-v)$, то линиями уровня v являются лучи, проходящие через начало координат. Якобиан $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ равен u . Поэтому замена переменных приводит к формуле

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \left(\int_0^R e^{-u} u^{p+q-1} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \right\},$$

т. е.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv. \quad (1.10)$$

Это и есть искомая формула. Ограничения $p \geq 1$ и $q \geq 1$ можно ослабить следующим образом. Левая часть равенства (1.10) голоморфна по p , когда $\operatorname{Re} p > 0$, и голоморфна по q , когда $\operatorname{Re} q > 0$. Из теоремы 1.1 следует, что то же самое справедливо и для правой части. Поэтому с помощью аналитического продолжения сначала по p , а затем по q область, в которой справедливо равенство (1.10), можно расширить до $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{Re} q > 0$. Интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0) \quad (1.11)$$

называется *бета-функцией*. С этим новым обозначением формула (1.10) принимает вид

$$B(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p + q).$$

Ограничиваясь при доказательстве нужной формулы положительными действительными значениями параметров и затем обращаясь к аналитическому продолжению, мы избегаем усложнений,

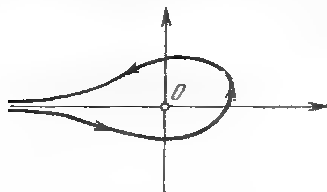


Рис. 1.2. t -плоскость. Контур для интеграла Ганкеля по петле.

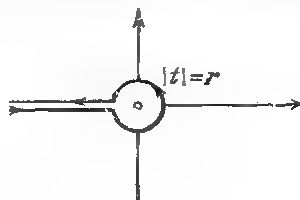


Рис. 1.3. t -плоскость.

которые могут возникнуть при прямом рассмотрении комплексных параметров. Этот эффективный метод часто используется при выводе формул преобразований специальных функций.

1.7. В этом пункте мы выведем интегральное представление для гамма-функции, справедливое *без всяких ограничений* на z . Оно строится не с помощью интегрирования по прямолинейному пути, а использует контур в виде петли в комплексной плоскости. Этот метод, предложенный Ганкелем (1864), применим ко многим подобным интегралам.

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt,$$

где обозначения в пределах указывают на то, что путь интегрирования начинается при $t = -\infty$, обходит точку $t = 0$ один раз в положительном направлении и возвращается в начальную точку (рис. 1.2). Предположим, что выбрана главная ветвь функции t^{-z} в точке (или в точках), где контур пересекает положительную действительную полуось, и эта ветвь всюду непрерывна. При данном выборе пути интеграл равномерно сходится относительно z на любом компактном подмножестве комплексной плоскости в силу наличия мажорирующего интеграла. Выбирая в качестве параметра интегрирования длину дуги и применяя теорему 1.1, убеждаемся в том, что $I(z)$ — целая функция z .

Пусть r — любое положительное число. Тогда по теореме Коши путь интегрирования можно деформировать, превратив его

в два берега интервала $(-\infty, -r)$ и окружность $|t|=r$ (рис. 1.3). Предположим на время, что переменная z фиксирована и $\operatorname{Re} z < 1$. Тогда при $r \rightarrow 0$ вклад от окружности в интеграл стремится к нулю. На нижнем берегу отрицательной действительной полуоси $\arg t = -\pi$, а на верхнем имеем $\arg t = \pi$. Полагая $\tau = |t|$, получаем

$$\begin{aligned} I(z) &= - \int_{\infty}^0 e^{-\tau} \tau^{-z} e^{i\pi z} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{-z} e^{-i\pi z} d\tau = \\ &= 2i \sin(\pi z) \Gamma(1-z) = 2\pi i / \Gamma(z); \end{aligned}$$

(сравните (1.07)). Возвращаясь к первоначальному пути, мы можем написать

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-z} dt. \quad (1.12)$$

Это и есть *интеграл Ганкеля по петле*. Аналитическое продолжение по z снимает временное ограничение на z ; при этом предполагается, что ветвь функции t^{-z} выбрана способом, указанным во втором абзаце этого пункта.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Показать, что при $\operatorname{Re} v > 0$, $\mu > 0$ и $\operatorname{Re} v > 0$

$$\int_0^{\infty} \exp(-zt^{\mu}) t^{v-1} dt = \frac{1}{\mu} \Gamma\left(\frac{v}{\mu}\right) \frac{1}{z^{v/\mu}},$$

где для дробных степеней выбираются главные значения.

1.2. Показать, что если переменная y действительна и отлична от нуля, то

$$|\Gamma(iy)| = (\pi / (y \operatorname{sh} \pi y))^{1/2},$$

1.3. Показать, что при $\operatorname{Re} p > 0$ и $\operatorname{Re} q > 0$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+q}}.$$

1.4. Показать, что если x и y действительны, то

$$\left| \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+iy)} \right|^2 = \prod_{s=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{y^2}{(x+s)^2} \right\} \quad (x \neq 0, -1, -2, \dots),$$

и, следовательно, $|\Gamma(x+iy)| \leq |\Gamma(x)|$.

1.5. Доказать равенство

$$\prod_{s=1}^{\infty} \frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}$$

при условии, что a и b не являются отрицательными целыми числами.

1.6. Показать, что при любых p и q

$$\int_a^{(1+, 0+, 1-, 0-)} v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv = -\frac{4\pi^2 e^{\pi i(p+q)}}{\Gamma(1-p)\Gamma(1-q)\Gamma(p+q)}.$$

Здесь a — любая точка интервала $(0, 1)$, а пределы означают, что путь интегрирования начинается в a , обходит точку $v = 1$ один раз в положительном направлении и возвращается в a , не обходя точку $v = 0$, затем обходит $v = 0$ в положительном направлении и возвращается в a , не обходя $v = 1$, и т. д. Множитель в подынтегральном выражении считается непрерывным на пути интегрирования и принимающим главное значение в начале его (Похгаммер, 1890).

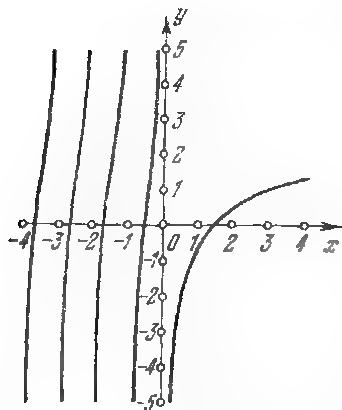


Рис. 2.1. Пси-функция $y = \psi(x)$.

§ 2. Пси-функция

2.1. Логарифмическая производная гамма-функции обычно обозначается через

$$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Большинство из свойств $\psi(z)$ вытекает непосредственно из соответствующих свойств гамма-функции. Например, единственными особыми точками $\psi(z)$ являются простые полюсы с вычетами, равными -1 , в точках $z = 0, -1, -2, \dots$

Иногда $\psi(z)$ называют *дигамма-функцией*, а ее последовательные производные $\psi'(z)$, $\psi''(z)$ — *тригамма-функцией*, *тетрагамма-функцией* и т. д.

График функции $\psi(z)$ для действительных значений изображен на рис. 2.1.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Показать, что если $z \neq 0, -1, -2, \dots$, то

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \psi(z+1) - \frac{1}{z} = \psi(1-z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z = \\ &= \frac{1}{2} \psi\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) + \ln 2. \end{aligned}$$

2.2. Показать, что

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+z} \right) \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots)$$

и поэтому

$$\Gamma'(1) = \psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{s} \quad (n=2, 3, \dots).$$

2.3. Из предыдущего упражнения вывести, что $\psi(1/2) = -\gamma - 2 \ln 2$.

2.4. Доказать, что

$$\psi'(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s+z)^2} \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Показать затем, что если z принимает действительные положительные значения, то $\Gamma(z)$ имеет простой минимум, лежащий между 1 и 2.

2.5. Показать, что при действительном y

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{y}{s^2 + y^2} = \operatorname{Im} \{\psi(1 + iy)\}.$$

2.6. Проверить, что каждое из следующих выражений равно γ :

$$-\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt, \quad \int_0^1 (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t} - \int_1^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt.$$

Показать, что $\gamma > 0$.

2.7. С помощью упражнений 2.2. и 2.6 доказать формулу Гаусса:

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Заметим, что это интегральное представление использует только *однозначные функции*.

§ 3. Интегральные функции: показательная, логарифмическая, синус и косинус

3.1. *Интегральная показательная функция* определяется формулой

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (3.01)$$

Точка $t = 0$ является полюсом подынтегрального выражения, и поэтому $z = 0$ является точкой ветвления функции $E_1(z)$. Главная ветвь получается при проведении разреза вдоль отрицательной действительной полуоси.

Одно из интегральных представлений с фиксированным путем интегрирования имеет вид

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.02)$$

Эту формулу легко доказать с помощью замены переменных, когда z положительно, и последующего аналитического продолжения в область

$$|\arg z| < \pi/2.$$

Дополнительная интегральная показательная функция задается формулой

$$\text{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad (3.03)$$

и является целой. Разлагая подынтегральное выражение в ряд по возрастающим степеням t и интегрируя почленно, мы получаем ряд Маклорена

$$\text{Ein}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \frac{z^s}{s!}. \quad (3.04)$$

Связь между $E_1(z)$ и $\text{Ein}(z)$ можно установить, временно предположив, что $z > 0$, и преобразовав (3.03) к виду

$$\text{Ein}(z) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln z - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

В соответствии с упр. 2.6 мы получаем, что

$$\text{Ein}(z) = E_1(z) + \ln z + \gamma. \quad (3.05)$$

Сравнение с (3.04) приводит теперь к равенству

$$E_1(z) = -\ln z - \gamma + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \frac{z^s}{s!}. \quad (3.06)$$

Аналитическое продолжение расширяет формулы (3.05) и (3.06) на комплексные значения z . В обоих случаях выбираются главные ветви $E_1(z)$ и $\ln z$.

3.2. Когда $z = x$ — действительное число, для экспоненциальной интегральной функции часто используется также следующее обозначение:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (x \neq 0), \quad (3.07)$$

где интеграл понимается как главное значение в смысле Коши,

если x положительно¹⁾. Связь с предыдущими обозначениями дается формулами

$$E_1(x) = -\text{Ei}(-x), \quad E_1(-x \pm i0) = -\text{Ei}(x) \mp i\pi, \quad (3.08)$$

где $x > 0$ в обоих соотношениях. Эти тождества можно вывести, заменяя t на $-t$ и используя, во втором случае, стягивающийся контур. Через $E_1(-x + i0)$ обозначено, например, значение главной ветви функции $E_1(-x)$ на верхнем берегу разреза.

Родственной функцией является *интегральный логарифм*, который при положительных x определяется формулой

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad (x \neq 1), \quad (3.09)$$

причем при $x > 1$ берется главное значение в смысле Коши. Производя замену переменной, мы находим, что

$$\text{li}(x) = \text{Ei}(\ln x) \quad (0 < x < 1 \text{ или } 1 < x < \infty). \quad (3.10)$$

3.3. Интегральные синусы определяются формулами

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{si}(z) = - \int_z^\infty \frac{\sin t}{t} dt. \quad (3.11)$$

Обе функции — целые. Чтобы установить связь между ними, нам понадобится следующий результат.

Лемма 3.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \pi. \quad (3.12)$$

Эту формулу можно вывести, интегрируя e^{it}/t по контуру, изображенному на рис. 3.1. На малой полуокружности $t = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, имеем

$$\int \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ire^{i\theta}) d\theta \rightarrow -i\pi \quad (r \rightarrow 0).$$

На большой полуокружности $t = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, мы используем неравенство Жордана

$$\sin \theta \geq 2\theta/\pi \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2), \quad (3.13)$$

¹⁾ Главное значение интеграла определяется как $\lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^x \right)$.

Тогда

$$\left| \int \frac{e^{it}}{t} dt \right| = \left| \int_0^\pi \exp(itRe^{i\theta}) d\theta \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \\ \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Равенство (3.12) получается при использовании теоремы Коши и выделении мнимой части.

Из (3.11) и (3.12) вытекает равенство

$$\text{Si}(z) = (\pi/2) + \text{si}(z). \quad (3.14)'$$

Функцию $\text{Si}(z)$ можно выразить через дополнительную интегральную показательную функцию с помощью замены переменной интегрирования t в (3.11) на it ; тогда

$$2i \text{Si}(z) = \text{Ein}(iz) - \text{Ein}(-iz). \quad (3.15)$$

Используя теперь формулы (3.05) и (3.14), мы получаем

$$2i \text{si}(z) = E_1(iz) - E_1(-iz). \quad (3.16)$$

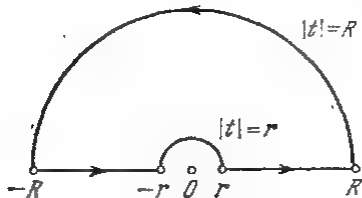


Рис. 3.1. t -плоскость.

В последнем соотношении ветви $E_1(iz)$ и $E_1(-iz)$ принимают

главные значения при положительных z и всюду непрерывны.

3.4. Интегральный косинус $\text{Ci}(z)$ и родственная ей функция $\text{Cin}(z)$ обычно определяются формулами

$$\text{Ci}(z) = - \int_z^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad \text{Cin}(z) = \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt. \quad (3.17)$$

Функция $\text{Ci}(z)$ имеет точку ветвления при $z = 0$; главная ветвь выделяется введением разреза вдоль отрицательной действительной полуоси. Функция $\text{Cin}(z)$ — целая.

Из (3.04) имеем

$$E_1(-iz) = \int_z^{i\infty} \frac{e^{it}}{t} dt = \int_z^\infty \frac{e^{it}}{t} dt,$$

причем деформация пути интегрирования на бесконечности проводится так же, как в лемме 3.1. Аналогичный результат спра-

ведлив для функции $E_1(iz)$; объединяя их, получаем равенство

$$2\text{Ci}(z) = -E_1(iz) - E_1(-iz). \quad (3.18)$$

Эта формула соответствует соотношению (3.16). Для дополнительных функций получаем, заменяя в формуле (3.03) t на it , соотношение

$$2\text{Cin}(z) = \text{Ein}(iz) + \text{Ein}(-iz). \quad (3.19)$$

Складывая два последних равенства и используя формулу (3.05), мы приходим к формуле, связывающей два интегральных косинуса:

$$\text{Ci}(z) + \text{Cin}(z) = \ln z + \gamma. \quad (3.20)$$

Здесь также выбираются главные значения $\text{Ci}(z)$ и $\ln(z)$.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Показать, что

$$\begin{aligned} \text{Si}(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^{2s+1}}{(2s+1)(2s+1)!}, \\ \text{Ci}(z) &= \ln z + \gamma + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!}. \end{aligned}$$

3.2. Показать, что

$$\int_0^{a/2} \exp(-ze^{it}) dt = -\text{si}(z) - i\{\text{Ci}(z) + E_1(z)\}.$$

3.3. Доказать, что при действительном a и положительном b

$$\int_0^a \frac{(1 - e^{-at}) \cos bt}{t} dt = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) + \text{Ci}(b) + \text{Re}\{E_1(a + ib)\}.$$

3.4. Проверять справедливость следующих формул преобразования Лапласа при $\text{Re } p > 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \text{si}(t) dt = -\frac{\text{arctg } p}{p}, \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \text{Ci}(t) dt = -\frac{\ln(1+p^2)}{2p}.$$

3.5. Обобщенная интегральная показательная функция определяется формулой

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при $\text{Re } z > 0$ и с помощью аналитического продолжения в остальных точках. Показать, что единственной особой точкой функции $E_n(z)$ является точка ветвления в $z = 0$.

Доказать также, что

$$nE_{n+1}(z) \equiv e^{-z} - zE_n(z)$$

и

$$E_n(z) = \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \{-\ln z + \psi(n)\} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-z)^s}{s!(n-s-1)!},$$

где штрих в знаке суммы означает, что член с номером $s = n-1$ должен быть пропущен.

3.6. Показать, что в обозначениях предыдущего упражнения

$$E_n(z) = \int_z^{\infty} E_{n-1}(t) dt = \dots = \int_z^{\infty} \dots \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} (dt)^n,$$

и, следовательно,

$$E_n(z) = \frac{e^{-z}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{n-1}}{z+t} dt \quad (|\arg z| < \pi).$$

§ 4. Интеграл вероятностей, интеграл Досона и интегралы Френеля

4.1. *Интеграл вероятностей и дополнительный интеграл вероятностей* играют важную роль в теории вероятностей и задачах теории теплопроводности. Они определяются соответственно формулами

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (4.01)$$

Обе функции — целые. Множитель $2/\pi^{1/2}$, т. е. $2/\Gamma(1/2)$, введен для того, чтобы упростить связывающее их соотношение

$$\operatorname{erf} z + \operatorname{erfc} z = 1. \quad (4.02)$$

Ряд Маклорена для функции $\operatorname{erf} z$ имеет вид

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\pi^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{z^{2s+1}}{2s+1}. \quad (4.03)$$

Родственный интеграл

$$F(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt \quad (4.04)$$

при действительном z называется *интегралом Досона*. Легко проверить, что

$$F(z) = \frac{\pi^{1/2}}{2i} e^{-z^2} \operatorname{erf}(iz), \quad (4.05)$$

4.2. Соответствующие интегралы осцилляторного типа

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{1}{2} \pi t^2\right) dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{1}{2} \pi t^2\right) dt \quad (4.06)$$

(при действительных значениях переменных) называются *интегралами Френеля*. Они также являются целыми функциями. Справедливо следующее соотношение, связывающее интегралы Френеля с интегралом вероятностей:

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{2} (1 + i) \operatorname{erf} \left\{ \frac{1}{2} \pi^{1/2} (1 - i) z \right\}. \quad (4.07)$$

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Показать, что при $a > 0$

$$\int_0^\infty \exp(-at^2) \sin bt \, dt = \frac{1}{a^{1/2}} F\left(\frac{b}{2a^{1/2}}\right),$$

где функция F определена формулой (4.04).

4.2. Пусть a и b — положительные числа и

$$I = \int_0^\infty \exp(-at^2) (t^2 + b^2)^{-1} dt.$$

Рассмотрев производную $d\{\exp(-ab^2)I\}/da$, доказать, что

$$I = (1/2) \pi b^{-1} \exp(ab^2) \operatorname{erfc}(ba^{1/2}).$$

4.3. Показать, что $C(\infty) = S(\infty) = 1$.

4.4. Пусть

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\exp(-u^2)}{u+x} dx \quad (x > 0).$$

Доказать, что

$$f(x) = -\ln x - (1/2)\gamma + o(1) \quad (x \rightarrow 0)$$

и

$$\frac{d}{dx} \left\{ \exp(x^2) f(x) - \pi^{1/2} \int_0^x \exp(u^2) du \right\} = -\frac{\exp(x^2)}{x}.$$

Проверить справедливость равенства

$$f(x) = \pi^{1/2} F(x) - (1/2) \exp(-x^2) \operatorname{Ei}(x^2).$$

(Эти результаты получены Гудвином и Стейтоном (1948), а также в работе Ритчи (1950), исправление к которой было дано Эрдейи (1950)).

§ 5. Неполная гамма-функция

5.1. Все функции, введенные в §§ 3 и 4, можно рассматривать как частные случаи *неполной гамма-функции*

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0) \quad (5.01)$$

или дополнительной функции $\Gamma(\alpha, z)$, определенной в следующем пункте. Очевидно, что $\gamma(\alpha, z)$ — аналитическая функция z , единственной возможной особенностью которой является точка ветвления в начале координат. Главная ветвь выделяется при проведении разреза вдоль отрицательной действительной полуоси t и при наложении условия, чтобы функция $t^{\alpha-1}$ принимала главное значение.

Если $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$, то в силу равномерной сходимости можно разложить e^{-t} в ряд по возрастающим степеням t и проинтегрировать его почленно. В результате мы получим следующее разложение, справедливое при всех значениях z :

$$\gamma(\alpha, z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^s}{s! (\alpha + s)}. \quad (5.02)$$

Это представление дает возможность аналитически продолжить $\gamma(\alpha, z)$ по α в левую полуплоскость или по z за пределы изменения аргумента, соответствующие главной ветви. Нетрудно видеть, что если $z \neq 0$, то единственными особыми точками $\gamma(\alpha, z)$ как функции α являются простые полюсы в $\alpha = 0, -1, -2, \dots$. Если же значение α фиксировано, то ветвь функции $\gamma(\alpha, z)$, которая получится при m -кратном обходе точки $z = 0$, определяется соотношением

$$\gamma(\alpha, ze^{2\pi ni}) = e^{2\pi n\alpha} \gamma(\alpha, z) \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (5.03)$$

5.2. *Дополнительная неполная гамма функция* (или *функция Прима*, как ее иногда называют), задается формулой

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (5.04)$$

где на α не наложено никаких ограничений. Главная ветвь определяется так же, как для $\gamma(\alpha, z)$. Объединяя эту формулу с (5.01), получим соотношение

$$\gamma(\alpha, z) + \Gamma(\alpha, z) = \Gamma(\alpha). \quad (5.05)$$

Из (5.03) и (5.05) вытекает равенство

$$\Gamma(\alpha, ze^{2\pi ni}) = e^{2\pi n\alpha i} \Gamma(\alpha, z) + (1 - e^{2\pi n\alpha i}) \Gamma(\alpha) \quad (5.06)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Аналитическое продолжение показывает, что этот результат справедлив также и тогда, когда α равно нулю или отрицательному целому числу, в предположении, что правая часть равенства заменяется ее предельным значением.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. В обозначениях §§ 3 и 4 показать, что

$$E_n(z) = z^{n-1} \Gamma(1-n, z),$$

$$\operatorname{erf} z = \pi^{-1/2} \gamma(1/2, z^2), \quad \operatorname{erfc} z = \pi^{-1/2} \Gamma(1/2, z^2).$$

5.2. Показать, что функция $\gamma(\alpha, z)/\{z^\alpha \Gamma(\alpha)\}$ — целая по α и по z и может быть разложена в ряд

$$e^{-z} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(\alpha + s + 1)}.$$

5.3. Показать, что

$$\frac{\partial^n \{z^{-\alpha} \Gamma(\alpha, z)\}}{\partial z^n} = (-1)^n z^{-\alpha-n} \Gamma(\alpha + n, z).$$

§ 6. Ортогональные полиномы

6.1. Пусть (a, b) — данный конечный или бесконечный интервал, а $w(x)$ — функция x , определенная в интервале (a, b) и обладающая следующими свойствами:

1) функция $w(x)$ положительна и непрерывна, исключая, возможно, конечное число точек;

$$2) \quad \int_a^b w(x) |x|^n dx < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Условие 2) подразумевает, в частности, что $w(x)$ интегрируема на данном интервале.) Семейство действительных полиномов $\varphi_n(x)$ порядка, точно равного n , $n = 0, 1, 2, \dots$, называется ортогональным на (a, b) с весовой функцией $w(x)$, если

$$\int_a^b w(x) \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx = 0 \quad (s \neq n). \quad (6.01)$$

Теорема 6.1. 1) Если коэффициент при x^n в полиноме $\varphi_n(x)$ задан для каждого n , то семейство ортогональных полиномов существует и единственно.

2) Каждый полином $\varphi_n(x)$ ортогонален ко всем полиномам меньшего порядка.

Пусть $a_{n,n} (\neq 0)$ обозначает заданный коэффициент при x^n в $\varphi_n(x)$. Предположим, что для некоторого значения n полиномы $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ определены таким образом, что они удовлетворяют условию (6.01). — это предположение, очевидно, справедливо при $n=1$. Поскольку каждый полином $\varphi_s(x)$ имеет степень, точно равную s , любой полином $\varphi_n(x)$ степени n с главным членом $a_{n,n}x^n$ может быть представлен в виде

$$\varphi_n(x) = a_{n,n}x^n + b_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x) + \\ + b_{n,n-2}\varphi_{n-2}(x) + \dots + b_{n,0}\varphi_0(x),$$

где коэффициенты $b_{n,s}$ не зависят от x . Использование условия (6.01) при $s=0, 1, \dots, n-1$ приводит к соотношению

$$a_{n,n} \int_a^b w(x) x^n \varphi_s(x) dx + b_{n,s} \int_a^b w(x) \{\varphi_s(x)\}^2 dx = 0.$$

Поскольку интеграл $\int_a^b w(x) \{\varphi_s(x)\}^2 dx$ не может обращаться в нуль, это соотношение определяет конечное значение $b_{n,s}$ и притом единственным образом. Отсюда в силу индукции вытекает первая часть теоремы.

Вторая часть легко доказывается, если заметить, что любой полином степени $n-1$ или меньше может быть представлен в виде линейной комбинации $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

6.2. Фиксирование значения коэффициента $a_{n,n}$ называется *нормировкой*. Один из методов нормировки заключается в том, что $a_{n,n}$ полагают равным единице, другой иногда используемый неявный способ нормировки основан на равенстве

$$\int_a^b w(x) \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx = \delta_{n,s}, \quad (6.02)$$

где $\delta_{n,s}$ — символ Кронекера, определенный формулами

$$\delta_{n,s} = 0 \quad (n \neq s), \quad \delta_{n,n} = 1.$$

Семейство полиномов, удовлетворяющих условию (6.02), называется *ортонормальным*.

6.3. Теорема 6.2. Каждое семейство ортогональных полиномов удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению вида

$$\varphi_{n+1}(x) - (A_n x + B_n) \varphi_n(x) + C_n \varphi_{n-1}(x) = 0, \quad (6.03)$$

где A_n, B_n и C_n не зависят от x .

Чтобы доказать это утверждение, мы сначала выберем A_n так, чтобы разность $\varphi_{n+1}(x) - A_n x \varphi_n(x)$ не содержала члена с x^{n+1} . Далее, полагаем

$$\varphi_{n+1}(x) - A_n x \varphi_n(x) = \sum_{s=0}^n c_{n,s} \varphi_s(x).$$

Коэффициенты $c_{n,s}$ можно найти, если умножить обе части этого равенства на $w(x) \varphi_s(x)$ и проинтегрировать его в пределах от a до b . В силу (6.01) мы получим

$$c_{n,s} \int_a^b w(x) \{\varphi_s(x)\}^2 dx = -A_n \int_a^b w(x) x \varphi_s(x) \varphi_n(x) dx.$$

Так как $x \varphi_s(x)$ — полином порядка $s+1$, а $\varphi_n(x)$ ортогонален ко всем полиномам степени, меньшей n , то все $c_{n,s}$ обращаются в нуль, исключая, возможно, $c_{n,n-1}$ и $c_{n,n}$. Этим теорема доказана, причем $B_n = c_{n,n}$ и $C_n = -c_{n,n-1}$.

6.4. Теорема 6.3. Нули каждого элемента семейства ортогональных полиномов действительны, различны и лежат в (a, b) .

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m, 0 \leq m \leq n$ — различные точки из (a, b) , в которых полином $\varphi_n(x)$ имеет нуль нечетной кратности. Тогда в (a, b) полином

$$\varphi_n(x) (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m)$$

имеет нули четной кратности. Если $m < n$, то из свойства ортогональности вытекает равенство

$$\int_a^b w(x) \varphi_n(x) (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m) dx = 0,$$

которое противоречит тому, что подынтегральное выражение не меняет знака в (a, b) . Поэтому $m = n$. Кроме того, поскольку полное число нулей равно n , каждая из точек x должна быть простым нулем. Этим завершается доказательство.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Показать, что в теореме 6.1 для нормировки $a_{n,n}$ нужно умножить каждый из полиномов $\varphi_n(x)$ на ненулевую постоянную.

Показать также, что ортонормальное семейство единственно с точностью до знаков.

6.2 (процесс ортонормализации Грама — Шмидта). Пусть $\{f_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — любое семейство полиномов, причем степень $f_n(x)$ равна

точно n . Определим последовательно для $n = 0, 1, 2$ полиномы

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= f_n(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \int_a^b w(t) f_n(t) \psi_s(t) dt \right\} \psi_s(x), \\ \varphi_n(x) &= \left[\int_a^b w(t) \{\psi_n(t)\}^2 dt \right]^{-1/2} \psi_n(x).\end{aligned}$$

Доказать, что семейство $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ ортонормально.

6.3. Применить теорему 6.2 для доказательства формулы Кристоффеля — Дарбу

$$(x-y) \sum_{s=0}^n \frac{1}{h_s} \varphi_s(x) \varphi_s(y) = \frac{a_{n,n}}{h_n a_{n+1,n+1}} \{\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(y) - \varphi_n(x) \varphi_{n+1}(y)\},$$

где $a_{n,n}$ — коэффициент при x^n в $\varphi_n(x)$ и

$$h_n = \int_a^b w(x) \{\varphi_n(x)\}^2 dx.$$

6.4. Пусть a и b — конечны, $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормальное семейство, $f(x)$ — непрерывная функция. Показать, что интеграл

$$\int_a^b w(x) \left\{ f(x) - \sum_{s=0}^n \alpha_s \varphi_s(x) \right\}^2 dx$$

минимизируется при $\alpha_s = \int_a^b w(x) f(x) \varphi_s(x) dx$.

§ 7. Классические ортогональные полиномы

7.1. В этом пункте мы рассмотрим специальные семейства ортогональных полиномов, которые играют важную роль в прикладной математике и численном анализе.

Мы будем снова обозначать рассматриваемый интервал через (a, b) , весовую функцию — через $w(x)$, а старший член полинома $\varphi_n(x)$ — через $a_{n,n}x^n$.

Полиномы Лежандра $P_n(x)$. Для этих полиномов интервал конечен, а весовая функция имеет простейший вид:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad w(x) = 1, \quad a_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (7.01)$$

Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Они являются обобщением полиномов Лежандра:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad a_{n,n} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}^{(1)}, \quad (7.02)$$

где α и β — действительные постоянные, удовлетворяющие условиям $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Таким образом,

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x). \quad (7.03)$$

Полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$. Для них интервал бесконечен:

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad w(x) = e^{-x} x^\alpha, \quad a_{n,n} = (-1)^n / n!, \quad (7.04)$$

где α — постоянная, причем $\alpha > -1$. Иногда $L_n^{(\alpha)}(x)$ называют *обобщенным полиномом Лагерра*, оставляя название полином Лагерра и обозначение $L_n(x)$ для $L_n^{(0)}(x)$.

Полиномы Эрмита $H_n(x)$. Для этих полиномов интервал бесконечен, а весовая функция убывает на обоих концах:

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad w(x) = e^{-x^2}, \quad a_{n,n} = 2^n. \quad (7.05)$$

7.2. Явное выражение для перечисленных полиномов дают *формулы Родрига*:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^n\}, \quad (7.06)$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \frac{(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}\}, \quad (7.07)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad (7.08)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (7.09)$$

То, что каждое из этих выражений является полиномом, следует из теоремы Лейбница.

Чтобы доказать, например, формулу (7.07), обозначим через $\varphi_n(x)$ правую часть и через $\omega(x)$ — любой многочлен. В

¹⁾
$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & n > 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

результате повторного интегрирования по частям мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \varphi_n(x) \omega(x) dx = \\ = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \omega^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части обращается в нуль, если степень $\omega(x)$ меньше, чем n . Поэтому $\varphi_n(x)$ удовлетворяет условию ортогональности для полиномов Якоби. Разлагая $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ по убывающим степеням x , легко заметить, что коэффициент при x^n в (7.07) имеет вид

$$\frac{1}{2^n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n}.$$

Поэтому в силу (7.02) и теоремы 6.1 формула (7.07) доказана.

Формула (7.06) является частным случаем (7.07), а формулы (7.08) и (7.09) можно проверить аналогичным образом. Можно также использовать формулы (7.07) и (7.08) как определения функций $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ и $L_n^{(\alpha)}(x)$ для значений α и β , при которых соотношения ортогональности неприменны из-за расходимости интегралов.

Другой способ нормировки классических полиномов заключается в том, что указывают значения постоянных

$$h_n = \int_a^b w(x) \{\varphi_n(x)\}^2 dx, \quad (7.10)$$

и знаки $a_{n,n}$. Выбирая в предыдущем доказательстве $\omega(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, мы находим, что в случае полиномов Якоби

$$\begin{aligned} h_n - \frac{a_{n,n}}{2^n} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx = \\ = a_{n,n} 2^{n+\alpha+\beta+1} \int_0^1 v^{n+\alpha} (1-v)^{n+\beta} dv = \\ = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \quad (7.11) \end{aligned}$$

(ср. (7.02) и (4.10)). В частности,

$$\int_{-1}^1 \{P_n(x)\}^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (7.12)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} h_n &= \Gamma(n+\alpha+1)/n! \quad (\text{для полиномов Лагерра}), \\ h_n &= \pi^{1/2} 2^n n! \quad (\text{для полиномов Эрмита}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Из классических полиномов ортогональное множество образуют только полиномы $L_n^{(0)}(x)$.

7.3. В оставшейся части этого параграфа мы ограничим наше внимание полиномами Лежандра. Соответствующие результаты для других полиномов сформулированы в качестве упражнений в конце параграфа.

Рекуррентные соотношения типа (6.03) можно получить, сравнивая коэффициенты. Из (7.06) нетрудно вывести, что коэффициенты при x^n , x^{n-1} и x^{n-2} в выражении для $P_n(x)$ имеют вид

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}, \quad 0 \quad \text{и} \quad -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-2)! (n-1)!} \quad (7.14)$$

соответственно. Отсюда мы получаем

$$A_n = \frac{2n+1}{n+1}, \quad B_n = 0, \quad C_n = \frac{n}{n+1},$$

и

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (7.15)$$

Кроме этого линейного рекуррентного соотношения второго порядка (или разностного уравнения), $P_n(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Функция

$$\frac{d}{dx} \{(1-x^2) P_n'(x)\} = (1-x^2) P_n''(x) - 2xP_n'(x), \quad (7.16)$$

является, очевидно, полиномом степени n и поэтому может быть представлена в виде

$$\sum_{s=0}^n c_{n,s} P_s(x). \quad (7.17)$$

Чтобы найти $c_{n,s}$, умножим это выражение на $P_s(x)$, проинтегрируем его от -1 до 1 и используем формулу (7.12). Тогда, после двукратного интегрирования по частям, мы найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{2c_{n,s}}{2s+1} &= \int_{-1}^1 P_s(x) \frac{d}{dx} \{(1-x^2) P_n'(x)\} dx = \\ &= \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \{(1-x^2) P_s'(x)\} dx, \end{aligned}$$

Поскольку $P_n(x)$ ортогонален всем полиномам меньшей степени, из полученного соотношения вытекает, что

$$c_{n,s} = 0 \quad (s < n).$$

Чтобы определить $c_{n,n}$, сравним коэффициенты при x^n в (7.16) и (7.17). Для $c_{n,n}$ получается значение $-n(n+1)$. Искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (7.18)$$

7.4. Предположим, что некоторая функция $G(x, h)$ разлагается в ряд Маклорена

$$G(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) h^n.$$

Функция $G(x, h)$ называется *производящей функцией* множества $\{\varphi_n(x)\}$. В этой заключительной части параграфа мы покажем, как строится производящая функция для $\{P_n(x)\}$.

Из формулы Родрига (7.06) и интегральной формулы Коши для n -й производной аналитической функции непосредственно получается *интеграл Шлефли*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}} dt, \quad (7.19)$$

где \mathcal{C} — любой простой замкнутый контур, окружающий точку $t=x$; здесь x может быть действительным или комплексным числом. Для фиксированного \mathcal{C} и достаточно малого $|h|$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2-1)^n h^n}{2^{n+1}\pi i (t-x)^{n+1}}$$

равномерно сходится относительно $t \in \mathcal{C}$ (в силу существования мажорирующего ряда). После интегрирования и суммирования мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \left\{ 1 - \frac{(t^2-1)h}{2(t-x)} \right\}^{-1} \frac{dt}{t-x} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n = G(x, h),$$

откуда

$$G(x, h) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dt}{ht^2 - 2t + (2x-h)} = -\frac{1}{h\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dt}{(t-t_1)(t-t_2)},$$

где

$$t_1 = \{1 - (1 - 2xh + h^2)^{1/2}\}/h, \quad t_2 = \{1 + (1 - 2xh + h^2)^{1/2}\}/h.$$

Очевидно, что если $h \rightarrow 0$, то $t_1 \rightarrow x$ и $|t_2| \rightarrow \infty$. Поэтому для достаточно малого $|h|$ контур \mathcal{C} содержит внутри себя t_1 и не

содержит t_2 . Из теоремы о вычетах получаем

$$G(x, h) = -\frac{2}{h} \frac{1}{t_1 - t_2} = \frac{1}{(1 - 2xh + h^2)^{1/2}}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$\frac{1}{(1 - 2xh + h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n, \quad (7.20)$$

в предположении, что величина $|h|$ достаточно мала и что выбранная ветвь квадратного корня стремится к 1 при $h \rightarrow 0$.

При $x \in [-1, 1]$ особенности левой части (7.20) лежат на окружности $|h| = 1$; следовательно, в этом случае радиус сходимости ряда в правой части равен единице.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Показать, что приведенные ниже функции $w(x)$ удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$w'' - 2xw' + 2nw = 0, \quad w = H_n(x); \quad xw'' + (\alpha + 1 - x)w' + nw = 0,$$

$$w = L_n^{(\alpha)}(x);$$

$$(1 - x^2)w'' + \{(\beta + \alpha) - (\alpha + \beta + 2)x\}w' + n(n + \alpha + \beta + 1)w = 0,$$

$$w = P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

7.2. Показать, что

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n + \beta}{n}.$$

7.3. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ и $U_n(x)$ определяются формулами

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\sin \{(n+1)\theta\}}{\sin \theta},$$

где $\theta = \arccos x$. Показать, что

$$T_n(x) = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x), \quad U_n(x) = \frac{2^{2n} n! (n+1)!}{(2n+1)!} P_n^{(1/2, 1/2)}(x).$$

7.4. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!} = \exp(2xh - h^2).$$

Доказать формулы $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ и

$$\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} H_s(x) H_{n-s}(y) = 2^{n/2} H_n\left(\frac{x+y}{2^{1/2}}\right).$$

7.5. Показать, что при $|h| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) h^n = \frac{e^{-xh/(1-h)}}{(1-h)^{\alpha+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) h^n = (1+h)^{\alpha} e^{-xh}.$$

Вывести из первого разложения равенство $dL_n^{(\alpha)}(x)/dx = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$ при $n \geq 1$.

7.6. Проверить, что при $n \geq 1$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

и

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (x-2n-\alpha-1)L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

7.7. Показать, что

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-1/2)}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(1/2)}(x^2).$$

7.8. Показать, что при $n \geq 1$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x),$$

$$n(n+1)\{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\} = (2n+1)(x^2-1)P'_n(x),$$

$$nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = (x^2-1)P'_n(x),$$

$$nP_n(x) - nxP_{n-1}(x) = (x^2-1)P'_{n-1}(x).$$

7.9. Выбрав в интеграле Шлефли контур \mathcal{C} вида $|t-x| = |x^2-1|^{1/2}$, получить интеграл Лапласа

$$P_n(x) = \pi^{-1} \int_0^\pi \{x \pm (x^2-1)^{1/2} \cos \theta\}^n d\theta.$$

Показать, что если $x \in [-1, 1]$, то $|P_n(x)| \leq 1$; в более общем случае, если $x = \cosh(\alpha + i\beta)$, где α и β — действительные числа, то $|P_n(x)| \leq e^{n|\alpha|}$. Далее показать, что радиус сходимости ряда (7.20) не меньше, чем $e^{-|\alpha|}$.

§ 8. Интеграл Эйри

8.1. Для действительных значений x интеграл Эйри определяется формулой

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt. \quad (8.01)$$

Хотя подынтегральное выражение не убывает при $t \rightarrow \infty$, возрастающая частота его осцилляций обеспечивает сходимость интеграла. В этом можно убедиться, интегрируя по частям. Действительно,

$$\int_0^t \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt = \frac{\sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right)}{t^2 + x} + 2 \int_0^t \sin\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) \frac{tdt}{(t^2 + x)^2}.$$

В правой части этого равенства при $t \rightarrow \infty$ первый член стремится к нулю, а интеграл сходится абсолютно.

Когда x не принадлежит действительной оси, интеграл (8.01) расходится. Чтобы аналитически продолжить $\text{Ai}(x)$ в комплексную плоскость, мы преобразуем этот интеграл в контурный. Положим $t = v/i$. Тогда

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{i\infty} \text{ch} \left(\frac{1}{3} v^3 - xv \right) dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp \left(\frac{1}{3} v^3 - xv \right) dv.$$

Предположив на время, что x положительно, рассмотрим интеграл

$$I(R) = \int_{iR}^{Re^{\pi i/6}} \left| \exp \left(\frac{1}{3} v^3 - xv \right) dv \right|,$$

где R — большое положительное число, а путь интегрирования совпадает с меньшей дугой окружности $|v| = R$. Сделав подстановку $v = iRe^{-i\theta/3}$ и используя неравенство Жордана (3.13), получим

$$\begin{aligned} I(R) &= \frac{R}{3} \int_0^{\pi} \exp \left(-\frac{1}{3} R^3 \sin \theta - xR \sin \frac{1}{3} \theta \right) d\theta \leq \\ &\leq \frac{R}{3} \int_0^{\pi} \exp \left(-\frac{1}{3} R^3 \sin \theta \right) d\theta \leq \\ &\leq \frac{2R}{3} \int_0^{\pi/2} \exp \left(-\frac{2R^3 \theta}{3\pi} \right) d\theta < \frac{\pi}{R^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $I(R)$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Аналогичное утверждение справедливо и для соответствующего интеграла вдоль сопряженного пути.

Заменяя x на z и используя теорему Коши, мы видим, что

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \exp \left(\frac{1}{3} v^3 - zv \right) dv, \quad (8.02)$$

где \mathcal{L} — любой контур, начинающийся в бесконечно удаленной точке сектора $-\pi/2 \leq \arg v \leq -\pi/6$ и заканчивающийся в бесконечно удаленной точке сопряженного¹⁾ сектора (рис. 8.1). Этот результат установлен для положительных значений z . Если δ — произвольное малое положительное число, а контур \mathcal{L} начинается

¹⁾ т. е. симметричного относительно действительной оси. — *Прим. ред.*

в секторе $-(\pi/2) + \delta \leq \arg v \leq -(\pi/6) - \delta$ и кончается в бесконечно удаленной точке сопряженного сектора, то на концах \mathcal{L} множитель e^{-zv} подавляется множителем $\exp(v^3/3)$, и интеграл (8.02) сходится абсолютно и равномерно в любой компактной области изменения z . Применяя теорему 1.1, где в качестве t выбираем дуговой параметр контура \mathcal{L} , мы видим, что при данном

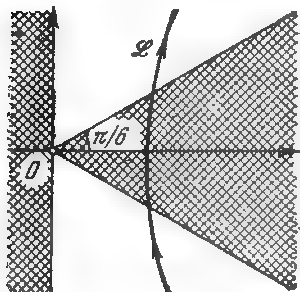


Рис. 8.1. v -плоскость.

выборе контура формула (8.02) осуществляет аналитическое продолжение $\text{Ai}(z)$ во всю плоскость z ; более того, $\text{Ai}(z)$ — целая функция.

8.2. Чтобы получить разложение $\text{Ai}(z)$ в ряд Маклорена, мы используем следующую общую теорему об интегрировании бесконечного ряда на бесконечном интервале или на интервале, где члены ряда обращаются в бесконечность.

Теорема 8.1.¹⁾ Пусть (a, b) — конечный или бесконечный интервал и $u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots$ — последовательность действительных или комплексных функций, непрерывных в (a, b) и обладающих следующими свойствами:

1) ряд $\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t)$ сходится равномерно на любом компактном интервале в (a, b) ;

2) конечна по крайней мере одна из величин

$$\int_a^b \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} |u_s(t)| \right\} dt, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b |u_s(t)| dt.$$

Тогда

$$\int_a^b \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} u_s(t) \right\} dt = \sum_{s=1}^{\infty} \int_a^b u_s(t) dt.$$

Возвращаясь к формуле (8.02), мы возьмем контур \mathcal{L} состоящим из лучей $\arg v = \pm \pi/3$ и разложим e^{-zv} в ряд по возрастающим степеням zv . Применяя теорему 8.1 и используя равенства

$$\int_0^{\infty e^{\pm \pi i/3}} v^s \exp\left(\frac{1}{3}v^3\right) dv = 3^{(s-2)/3} e^{\pm (s+1)\pi i/3} \Gamma\left(\frac{s+1}{3}\right) \\ (s = 0, 1, 2, \dots),$$

которые получаются из (1.01) подстановкой $v = (3t)^{1/3} e^{\pm \pi i/3}$,

¹⁾ В оригинале эта теорема называется *dominated convergence theorem*. — Прим. перев.

приходим к разложению

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) = & \text{Ai}(0) \left(1 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} z^9 + \dots \right) + \\ & + \text{Ai}'(0) \left(z + \frac{2}{4!} z^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} z^{10} + \dots \right), \end{aligned} \quad (8.03)$$

где

$$\text{Ai}(0) = \frac{\Gamma(1/3)}{3^{1/3} 2\pi} = \frac{1}{3^{1/3} \Gamma(2/3)}, \quad \text{Ai}'(0) = -\frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\pi} = -\frac{1}{3^{1/3} \Gamma(1/3)}. \quad (8.04)$$

8.3. Одно из наиболее важных свойств функции $\text{Ai}(z)$ состоит в том, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка очень простого вида. Используя теорему 1.1 и дифференцируя в (8.02) под знаком интеграла, мы находим, что

$$\begin{aligned} \text{Ai}''(z) - z \text{Ai}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} (v^2 - z) \exp\left(\frac{1}{3} v^3 - zv\right) dv = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\exp\left(\frac{1}{3} v^3 - zv\right) \right]_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Выражение в скобках обращается в нуль на концах \mathcal{L} . Поэтому функция $w = \text{Ai}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = zw. \quad (8.05)$$

Уравнение (8.05) не меняется при замене z на $ze^{\pm 2\pi i/3}$. Поэтому функции $\text{Ai}(ze^{2\pi i/3})$ и $\text{Ai}(ze^{-2\pi i/3})$ также являются решениями. В главе 5 мы увидим, что только два решения могут быть независимыми; следовательно, функции $\text{Ai}(z)$, $\text{Ai}(ze^{2\pi i/3})$ и $\text{Ai}(ze^{-2\pi i/3})$ связаны линейной зависимостью. Соответствующие коэффициенты можно найти, интегрируя $\exp((v^3/3) - zv)$ вдоль пути в v -плоскости, который начинается в $\infty e^{-\pi i/3}$, затем идет в $\infty e^{\pi i/3}$, далее в $-\infty$, и, наконец, возвращается снова в $\infty e^{-\pi i/3}$. Применение теоремы Коши приводит к искомому результату

$$\text{Ai}(z) + e^{2\pi i/3} \text{Ai}(ze^{2\pi i/3}) + e^{-2\pi i/3} \text{Ai}(ze^{-2\pi i/3}) = 0. \quad (8.06)$$

УПРАЖНЕНИЕ

8.1. Показать, что функция $w = \text{Ai}^2(z)$ удовлетворяет уравнению $w''' - 4zw' - 2w = 0$.

§ 9. Функция Бесселя $J_n(z)$

9.1. Для целых значений n и действительных или комплексных значений z функция $J_n(z)$ определяется на основе интеграла Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.01)$$

Переменные n и z называются соответственно *порядком* и *аргументом* функций $J_n(z)$. Из теоремы 1.1 следует, что $J_n(z)$ — целая функция z . Чтобы облегчить вычисление коэффициентов ее ряда Маклорена, мы построим сначала представление с помощью контурного интеграла. Равенство (9.01) можно переписать в виде

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-in\theta + iz \sin \theta) d\theta. \quad (9.02)$$

Полагая $h = e^{i\theta}$, мы получаем

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \exp\left\{\frac{1}{2} z (h - h^{-1})\right\} \frac{dh}{h^{n+1}}, \quad (9.03)$$

где \mathcal{C} — окружность единичного радиуса. Единственной особой точкой подынтегрального выражения в комплексной h -плоскости является начало координат, и поэтому \mathcal{C} можно деформировать в любой простой замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат.

Дифференцируя s раз и полагая $z = 0$, мы видим, что $J_n^{(s)}(0)$ — вычет функции $\{(h - h^{-1})/2\}^s h^{-n-1}$ в точке $h = 0$. Предположим сначала, что n — неотрицательное число. Тогда ¹⁾

$$J_n^{(s)}(0) = 0 \quad (0 \leq s \leq n-1)$$

и

$$J_n^{(n+2s)}(0) = \frac{(-1)^s}{2^{n+2s}} \binom{n+2s}{s}, \quad J_n^{(n+2s+1)}(0) = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

В соответствии с этим

$$J_n(z) = \left(\frac{1}{2} z\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{4} z^2\right)^s}{s! (n+s)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.04)$$

Соответствующее разложение для отрицательного n можно получить тем же самым способом, однако проще воспользоваться

¹⁾ По теореме Коши. — Прим. ред.

формулой (9.01). Заменяя в ней θ на $\pi - \theta$, мы немедленно выводим, что

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (9.05)$$

9.2. Производящую функцию и дифференциальное уравнение для $J_n(z)$ можно получить следующим образом.

Используя формулу (9.03) и применяя теорему Лорана о разложении аналитической функции в ряд в окрестности изолированной существенно особой точки, мы находим производящую функцию:

$$\exp\{z(h - h^{-1})/2\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) h^n. \quad (9.06)$$

По теореме Лорана это разложение сходится для всех значений h и z , исключая точку $h = 0$.

Далее, продифференцируем выражение (9.01) по переменной z . Обозначая для краткости $\Theta = n\theta - z \sin \theta$, мы получаем

$$J'_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin \Theta d\theta$$

и

$$\{zJ'_n(z)\}' = -\frac{z}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \Theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin \Theta d\theta.$$

Интегрирование последнего слагаемого по частям дает

$$\{zJ'_n(z)\}' = -\frac{z}{\pi} \int_0^\pi \cos \Theta d\theta + \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \cos \Theta d\theta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z\{zJ'_n(z)\}' + (z^2 - n^2)J_n(z) &= \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi (z \cos \theta - n) \cos \Theta d\theta = \frac{n}{\pi} [-\sin \Theta]_0^\pi = 0. \end{aligned} \quad (9.07)$$

Таким образом, функция $w = J_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - n^2)w = 0. \quad (9.08)$$

Уравнение (9.08) называется *уравнением Бесселя*. Оно играет важную роль во многих физических задачах.

9.3. Заменяем теперь n произвольным действительным или комплексным числом ν . Выкладки § 9.2 не дают возможности

утверждать, что функция $J_\nu(z)$, определенная формулой (9.01), удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя; действительно, $\sin \theta$ обращается в нуль при $\theta = \pi$ лишь тогда, когда n — целое число или нуль. Поэтому мы определим $J_\nu(z)$ с помощью ряда

$$J_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z^2/4)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)}. \quad (9.09)$$

Очевидно, что это определение согласуется с (9.04), если ν — нуль или положительное целое число. Нетрудно убедиться, что оно согласуется с предыдущим определением и в случае, когда ν — отрицательное целое число, поскольку тогда первые $-\nu$ членов ряда (9.09) тождественно равны нулю.

С помощью формулы (1.03) и мажорируемости ряда легко проверить, что ряд в (9.09) сходится равномерно на любых компактных множествах в плоскостях переменных ν и z . Поэтому функция $(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$ — целая по z и ν . Так как $(z/2)^\nu = \exp\{\nu \ln(z/2)\}$, то $J_\nu(z)$ — целая функция z (исключая случай, когда $z = 0$) и многозначная функция ν (исключая случаи, когда ν — нуль или целое число). Ее главная ветвь выделяется выбором главной ветви $(z/2)^\nu$ в (9.09); остальные ветви связаны соотношением

$$J_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{m\nu\pi i} J_\nu(z) \quad (m \text{ — целое число}). \quad (9.10)$$

Ряд (9.09) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0 \quad (9.11)$$

(сравните (9.08)); это легко проверить с помощью почленного дифференцирования. Кроме того, поскольку дифференциальное уравнение не меняется при замене ν на $-\nu$, существует также решение $w = J_{-\nu}(z)$.

9.4. Контурный интеграл для $J_\nu(z)$ можно найти, если подставить в (9.09) для каждой гамма-функции ее представление через интеграл Ганкеля (1.12). Это дает

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z^2/4)^s}{s!} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-\nu-s-1} dt.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования — законность этой процедуры можно доказать, выбирая дуговой параметр в качестве переменной интегрирования и используя теорему 8.1, — мы получаем равенство

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (9.12)$$

Оно называется *интегралом Шлефли* для $J_\nu(z)$ (ср. (7.19)). Как и в (1.12), функция $t^{\nu+1}$ принимает главное значение, когда путь интегрирования пересекает положительную действительную полуось, и всюду непрерывна.

Если на время предположить, что z положительно, и сделать замену $t = zh/2$ в (9.12), то мы получим представление

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left\{\frac{1}{2}z(h - h^{-1})\right\} \frac{dh}{h^{\nu+1}}.$$

(Отметим, что когда ν — целое число, подынтегральное выражение однозначное, и интеграл приводится к виду (9.03).)

Положим теперь $h = e^\tau$. Тогда

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty-i\pi}^{\infty+i\pi} e^{zsh\tau - \nu\tau} d\tau. \quad (9.13)$$

Это представление также получено Шлефли; контур изображен на рис. 9.1. С помощью аналитического продолжения этот результат обобщается на область $|\arg z| < \pi/2$.

9.5. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя можно вывести или из определения в виде ряда, или из интегралов Шлефли. Второй способ более конструктивен. Из (9.13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z J_{\nu-1}(z) + \frac{1}{2} z J_{\nu+1}(z) - \nu J_\nu(z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty-i\pi}^{\infty+i\pi} (z \operatorname{ch} \tau - \nu) e^{zsh\tau - \nu\tau} d\tau = \\ &= (2\pi i)^{-1} [e^{zsh\tau - \nu\tau}]_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z). \quad (9.14)$$

Хотя представлению (9.13) справедливо лишь при $|\arg z| < \pi/2$, в формуле (9.14) это ограничение устраняется аналитическим продолжением.

Аналогично,

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} \operatorname{sh} \tau e^{zsh\tau - \nu\tau} d\tau,$$

Откуда

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z). \quad (9.15)$$

Из (9.14) и (9.15) легко вывести следующие соотношения:

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J'_{\nu}(z), \quad J_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) + J'_{\nu}(z). \quad (9.16)$$

В частности, $J'_0(z) = -J_1(z)$.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Используя производящую функцию, вывести разложения

$$\begin{aligned} 1 &= J_0(z) + 2J_2(z) + 2J_4(z) + 2J_6(z) + \dots, \\ \cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - 2J_6(z) + \dots, \\ \frac{1}{2} z \cos z &= J_1(z) - 9J_3(z) + 25J_5(z) - 49J_7(z) + \dots \end{aligned}$$

9.2. Доказать для целых значений порядка n теорему сложения Неймана

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(z_1) J_{n-s}(z_2).$$

Вывести из нее формулу $1 = J_0^2(z) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s^2(z)$.

9.3. Показать, что

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z, \quad J_{3/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right), \\ J_{-1/2}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z, \quad J_{-3/2}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(\frac{\cos z}{z} + \sin z\right). \end{aligned}$$

9.4. Показать, что

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^s \{z^{\nu} J_{\nu}(z)\} = z^{\nu-s} J_{\nu-s}(z), \quad \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^s \{z^{-\nu} J_{\nu}(z)\} = (-1)^s z^{-\nu-s} J_{\nu+s}(z).$$

9.5. Разлагая косинус под знаком интеграла в степенной ряд, доказать соотношение

$$J_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta \quad (\operatorname{Re} \nu > -1/2),$$

которое называется *интегралом Пуассона*. Прямым вычислением проверить, что этот интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя.

9.6. Вывести из предыдущего упражнения, что

$$|J_{\nu}(z)| \leq \frac{|z/2|^{\nu} e^{|\operatorname{Im} z|}}{\Gamma(\nu + 1)} \quad (\nu \geq -1/2),$$

а из (9.02) — неравенство

$$|J_n(z)| \leq e^{|\operatorname{Im} z|} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

9.7. Показать, что при $\operatorname{Re} \nu > -1$

$$\int_0^z J_{\nu}(t) dt = 2 \sum_{s=0}^{\infty} J_{\nu+2s+1}(z).$$

Используя упр. 9.3 и обозначения § 4.2, вывести формулы

$$C(z) = \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1/2} \left(\frac{\pi z^2}{2} \right), \quad S(z) = \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+3/2} \left(\frac{\pi z^2}{2} \right).$$

9.8. Из определения (9.09) вывести, что если a , b и $\nu + 1/2$ — положительные числа и $b < a$, то

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_\nu(bt) t^\nu dt = \frac{\Gamma(\nu + 1/2) (2b)^\nu}{\pi^{1/2} (a^2 + b^2)^{\nu+1/2}}.$$

Доказать также, что ограничение $b < a$ может быть устранено, если использовать упр. 9.6 и аналитическое продолжение.

§ 10. Модифицированная функция Бесселя $I_\nu(z)$

10.1. Модифицированная функция Бесселя $I_\nu(z)$ при всех значениях ν и z , исключая $z = 0$, определяется рядом

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)}. \quad (10.01)$$

Это выражение, как и (9.09) — многозначная функция z , если ν не равно нулю или целому числу. Ее главная ветвь выделяется выбором главного значения для $(z/2)^\nu$.

Сравнивая (9.09) с (10.01), мы видим, что

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz), \quad (10.02)$$

где ветви обеих функций принимают главное значение при $\arg z = 0$ и всюду непрерывны. (Необходимо отметить, что разрезы для главных ветвей $I_\nu(z)$ и $J_\nu(iz)$ не совпадают (ср. упр. 10.2).) В соответствии с этим соотношением функцию $I_\nu(z)$ иногда называют *функцией Бесселя мнимого аргумента*.

Большинство свойств $I_\nu(z)$ выводится прямо из свойств $J_\nu(z)$ с помощью (10.02). Например, *модифицированное уравнение Бесселя*

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0 \quad (10.03)$$

имеет решения $w = I_{\pm\nu}(z)$. Рекуррентные соотношения для модифицированных функций имеют вид

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \quad I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \quad (10.04)$$

$$I_{\nu+1}(z) = -\frac{\nu}{z} I_\nu(z) + I'_\nu(z), \quad I_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} I_\nu(z) + I'_\nu(z). \quad (10.05)$$

Дальнейшие свойства $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ и других решений дифференциальных уравнений (9.11) и (10.03) изложены в главе 7.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Доказать, что при целом n

$$I_n(z) = I_{-n}(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

10.2. Доказать, что для главных ветвей справедливы равенства

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz) \quad (-\pi < \arg z \leq \pi/2)$$

$$I_\nu(z) = e^{i\nu\pi/2} J_\nu(iz) \quad (\pi/2 < \arg z \leq \pi).$$

10.3. Доказать, что

$$\exp\left\{\frac{1}{2}z(h+h^{-1})\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) h^n \quad (h \neq 0).$$

10.4. Показать, что преобразование $\xi = 2z^{3/2}/3$ и $W = z^{-1/2}w$ приводит уравнение (8.05) к виду

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} - \left(1 + \frac{1}{9\xi^2}\right) W = 0.$$

Показать также, что

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{3} z^{1/2} \{I_{-1/3}(\xi) - I_{1/3}(\xi)\}, \quad \text{Ai}(-z) = \frac{1}{3} z^{1/2} \{J_{-1/3}(\xi) + J_{1/3}(\xi)\},$$

$$\text{Ai}'(z) = \frac{1}{3} z \{I_{2/3}(\xi) - I_{-2/3}(\xi)\}, \quad \text{Ai}'(-z) = \frac{1}{3} z \{J_{2/3}(\xi) - J_{-2/3}(\xi)\},$$

где все функции имеют при $\arg z = 0$ главные значения и связаны по непрерывности.

10.5. С помощью упр. 9.4 доказать, что

$$I_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} J_{\nu+s}(z), \quad J_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^s}{s!} I_{\nu+s}(z),$$

где ветви функций принимают главные значения при $\arg z = 0$.

10.6. Показать, что решениями дифференциального уравнения

$$x^4 w^{(4)} - 2x^3 w''' - (1 + 2\nu^2)(x^2 w'' - xw') + (\nu^4 - 4\nu^2 + x^4)w = 0$$

являются функции Кельвина $\text{ber}_\nu x$, $\text{bei}_\nu x$, $\text{ber}_{-\nu} x$ и $\text{bei}_{-\nu} x$, определенные равенством

$$\text{ber}_\nu x \pm i \text{bei}_\nu x = J_\nu(xe^{\pm 3\pi i/4}) = e^{\pm \nu\pi i/2} I_\nu(xe^{\pm \pi i/4}).$$

§ 11. Дзета-функция

11.1. Дзета-функция (Римана) определяется рядом

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} \quad (11.01)$$

при $\text{Re } z > 1$ и с помощью аналитического продолжения в дру-

гих точках. Ряд сходится абсолютно и равномерно в любой компактной области полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$, и поэтому $\zeta(z)$ голоморфна в этой полуплоскости.

Интегральное представление для $\zeta(z)$ можно найти, если подставить в (11.01) интеграл Эйлера для гамма-функции, взятый в виде

$$\frac{1}{s^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Если $\operatorname{Re} z > 1$, то мы можем в силу теоремы 8.1 поменять порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 1). \quad (10.02)$$

11.2. Аналитическое продолжение $\zeta(z)$ в область $\operatorname{Re} z \leq 1$ можно осуществить, построив интеграл типа Ганкеля с контуром в виде петли. Рассмотрим функцию

$$I(z) = \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{t^{z-1}}{e^{-t} - 1} dt,$$

где контур не охватывает ни одну из точек $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$. Применяя теорему 1.1 и выбирая в этой теореме в качестве t дуговой параметр пути интегрирования, мы немедленно убеждаемся, что функция $I(z)$ — целая. Предположим временно, следуя § 1.7, что $\operatorname{Re} z > 1$, и деформируем путь интегрирования до совпадения с отрицательной действительной полуосью; тогда

$$I(z) = 2i \sin(\pi z) \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^{-t} - 1} dt = 2i \sin(\pi z) \Gamma(z) \zeta(z)$$

(ср. (11.02)). Использование формулы отражения для гамма-функции приводит к равенству

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{t^{z-1}}{e^{-t} - 1} dt. \quad (11.03)$$

Это и есть искомая формула. Как и в интеграле Ганкеля, ветвь t^{z-1} принимает главное значение, когда контур пересекает положительную действительную полуось, и доопределена всюду по непрерывности.

Если $\operatorname{Re} z \leq 1$, формула (11.03) осуществляет требуемое аналитическое продолжение $\zeta(z)$. Очевидно, что единственными

возможными особыми точками являются особенности $\Gamma(1-z)$, т. е. $z = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку мы знаем, что функция $\zeta(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z > 1$, остается рассмотреть лишь точку $z = 1$. В силу теоремы о вычетах

$$\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{dt}{e^{-t}-1} = -2\pi i.$$

Поэтому единственной особенностью $\zeta(z)$ является простой полюс с вычетом, равным 1, в точке $z = 1$.

11.3. Можно ли с помощью деформации контура вычислить интеграл (11.03) для любых значений z ? Исключая значение $t = 0$, особенностями подынтегрального выражения являются простые полюсы в точках $t = \pm 2s\pi i$, $s = 1, 2, \dots$. Пусть N — большое положительное целое число; рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathcal{R}_N} \frac{t^{z-1}}{e^{-t}-1} dt, \quad (11.04)$$

где \mathcal{R}_N — периметр прямоугольника с вершинами $\pm N \pm (2N-1)\pi i$ ¹⁾. Легко проверить, что

$$|e^{-t}-1| \geq 1-e^{-N} \quad (t \in \mathcal{R}_N).$$

Поэтому если $\operatorname{Re} z < 0$, то (11.04) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Вычеты функции $t^{z-1}/(e^{-t}-1)$ в точках $t = \pm 2s\pi i$ равны $-(\pm 2s\pi i)^{z-1}$. Применяя теорему о вычетах к (11.03), находим, что

$$\zeta(z) = \Gamma(1-z) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (2s\pi i)^{z-1} + \sum_{s=1}^{\infty} (-2s\pi i)^{z-1} \right\},$$

т. е.

$$\zeta(z) = \Gamma(1-z) 2^z \pi^{z-1} \cos\{\pi(z-1)/2\} \zeta(1-z).$$

Аналитическое продолжение расширяет этот результат на все z , отличные от $z = 1$.

Таким образом, хотя деформация пути и не приводит к фактическому представлению для $\zeta(z)$, она дает важную формулу отражения. Эта формула получена Риманом; чаще она записывается в виде

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \zeta(z). \quad (11.05)$$

11.4. Интеграл (11.03) можно вычислить в точке $z = 1$, поскольку в этом случае подынтегральное выражение является однозначной функцией t и можно применить теорему о вычетах.

¹⁾ Подынтегральное выражение разрывно при $t = -N$.

Аналогичные вычисления можно провести и для других целых значений z . Мы укажем следующие частные случаи (11.05) или их предельные значения:

$$\zeta(-2m) = 0, \quad \zeta(1-2m) = (-1)^m 2^{1-2m} \pi^{-2m} (2m-1)! \zeta(2m) \\ (m = 1, 2, 3, \dots)$$

и

$$\zeta(0) = -1/2.$$

11.5. Последней формулой этого параграфа будет бесконечное произведение, полученное Эйлером. Предположим, что $\operatorname{Re} z > 1$ и вычтем из (11.01) соответствующий ряд для $2^{-z}\zeta(z)$. Тогда

$$\zeta(z)(1-2^{-z}) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots$$

Аналогично,

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z}) = \sum \frac{1}{s^z},$$

где суммирование проводится по всем положительным целым числам, исключая кратные чисел 2 и 3.

Пусть теперь ω_s — s -е простое число, если считать от $\omega_1 = 2$. Продолжая предыдущие рассуждения, мы видим, что

$$\zeta(z) \prod_{s=1}^n (1 - \omega_s^{-z}) = 1 + \sum \frac{1}{s^z},$$

где последняя сумма не содержит слагаемых, для которых s равняется 1 или числам, кратным $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Эта сумма по абсолютной величине ограничена выражением

$$\sum_{s=\omega_n+1}^{\infty} \frac{1}{s^{\operatorname{Re} z}}$$

и поэтому стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (так как $\omega_n \rightarrow \infty$).

Следовательно, мы получаем искомую формулу

$$\zeta(z) \prod_{s=1}^{\infty} (1 - \omega_s^{-z}) = 1 \quad (\operatorname{Re} z > 1).$$

Это соотношение для дзета-функции является одним из наиболее важных в теории простых чисел.

Сравнивая бесконечные произведения

$$\prod_{s=2}^{\infty} (1 - s^{-z}), \quad \prod_{s=1}^{\infty} (1 - \omega_s^{-z}) \quad (\operatorname{Re} z > 1),$$

мы замечаем, что сомножители второго образуют подмножества среди сомножителей первого. Поскольку первое произведение

абсолютно сходится, то же можно сказать и о втором. Непосредственным следствием является то, что $\zeta(z)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$. Объединяя этот результат с формулой отражения (11.05), мы видим, что единственными нулями функции $\zeta(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ являются точки $-2, -4, -6, \dots$

В оставшейся полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ природа нулей полностью не выяснена. Знаменитое и все еще не доказанное предположение Римана заключается в том, что все они лежат на средней линии $\operatorname{Re} z = 1/2$. Одним из многих результатов, зависящих от этого предположения, является следующая формула для числа $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x :

$$\operatorname{li}(x) - \pi(x) = O(x^{1/2} \ln x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

где функция $\operatorname{li}(x)$ определена в § 3.2.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$(1 - 2^{1-z}) \zeta(z) = \frac{1}{1^z} - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

11.2. С помощью упр. 2.6 показать, что

$$\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{\ln t}{e^{-t} - 1} dt = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{z \rightarrow 1} \{\zeta(z) - (z-1)^{-1}\} = \gamma, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

11.3. С помощью упр. 2.4 доказать, что

$$\ln \{\Gamma(z)\} = -\gamma(z-1) + \sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{\zeta(s)}{s} (z-1)^s \quad (|z-1| < 1).$$

Исторические сведения и дополнительные ссылки

Материал этой главы является классическим. При изложении были существенно использованы книги Уиттекера и Ватсона (1927), Копсона (1935), Бейтмена и Эрдейя (1953а, в) и С. С. Ф. (1964).

§ 1. 1) История гамма-функции прекрасно изложена Дэйвисом (1959).
2) Постоянная Эйлера вычислена с точностью 3566 десятичных знаков в работе Суини (1963). Вопрос о том, является ли γ алгебраическим или трансцендентным числом, — т. е. является ли γ решением некоторого степенного уравнения, — остается нерешенным.

§§ 3—5. Таблицы формул для определенных и неопределенных интегралов, в которые входят интегральная показательная функция и интеграл вероятностей, составлены Геллером и Нг (1969) и Нг и Геллером (1969). Дальнейшие свойства этих функций, а также неполной гамма-функции можно найти в книге Люка (1962).

§§ 6—7. Основным трудом по ортогональным полиномам является монография Сеге (1962). При подготовке этих параграфов использовалась также монография Хохштадта (1961).

§§ 8—10. Замечания относительно интеграла Эйри и функций Бесселя см. на стр. 356.

§ 11. Хотя дзета-функция была известна еще Эйлеру, ее наиболее важные свойства были сформулированы Риманом (1859). Относительно дальнейших результатов см. Титчмарш (1953).

ИНТЕГРАЛЫ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

§ 1. Интегрирование по частям

1.1. Простой и часто эффективный способ вывода асимптотических разложений интегралов, содержащих параметр, состоит в интегрировании по частям. Каждое интегрирование дает новый член разложения, а остаточный член получается явно в виде интеграла, который можно оценить.

Рассмотрим неполную гамма-функцию с действительными аргументами α и x , причем x положителен. Разложение в сходящийся ряд (5.02), приведенное в главе 2, удобно для вычисления $\gamma(\alpha, x)$ при малых или не слишком больших значениях x ; однако при больших x происходит взаимное сокращение членов разложения. Поэтому мы будем искать асимптотическое разложение; при этом более удобно работать с дополнительной функцией $\Gamma(\alpha, x)$.

Интегрирование по частям в определении (5.04) главы 2 дает

$$\Gamma(\alpha, x) = e^{-x}x^{\alpha-1} + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1, x).$$

Повторное применение этого результата приводит к формуле

$$\Gamma(\alpha, x) = e^{-x}x^{\alpha-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha-1}{x} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^2} + \dots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-n+1)}{x^{n-1}} \right\} + \varepsilon_n(x), \quad (1.01)$$

где n — произвольное неотрицательное целое число и

$$\varepsilon_n(x) = (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) \int_x^\infty e^{-t}t^{\alpha-n-1}dt. \quad (1.02)$$

Если $n \geq \alpha-1$, то $t^{\alpha-n-1} \leq x^{\alpha-n-1}$, и мы сразу получаем

$$|\varepsilon_n(x)| \leq (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n) |e^{-x}x^{\alpha-n-1}|. \quad (1.03)$$

Таким образом, для фиксированного α и больших значений x имеем

$$\Gamma(\alpha, x) \sim e^{-x}x^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-s)}{x^s}. \quad (1.04)$$

Кроме того, n -й остаточный член ограничен по абсолютной величине $(n+1)$ -м членом ряда и имеет тот же знак, если $n \geq \alpha - 1$.

В качестве частного случая отметим формулу

$$\Gamma(\alpha, x) \leq e^{-x} x^{\alpha-1} \quad (\alpha \leq 1, x > 0), \quad (1.05)$$

которая нам понадобится в дальнейшем.

1.2. Если $n < \alpha - 1$, то остаточный член $\varepsilon_n(x)$ не ограничен по абсолютной величине первым отбрасываемым членом ряда. В этом легко убедиться, воспользовавшись тождеством

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) = & (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n) e^{-x} x^{\alpha-n-1} + \\ & + (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n - 1) \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-n-2} dt, \end{aligned}$$

которое получается из (1.02) интегрированием по частям; оба слагаемых в правой части положительны при $n < \alpha - 1$. Однако, продолжая процесс разложения, мы увидим, что первые $[\alpha] - n + 1$ отбрасываемых членов ряда неотрицательны и величина $\varepsilon_n(x)$ ограничена их суммой.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Показать, что разложение (1.04) равномерно относительно α в компактном интервале.

1.2. Доказать, что

$$\operatorname{erfc} x \sim \frac{\exp(-x^2)}{\pi^{1/2} x} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2s-1)}{(2x^2)^s} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Показать также, что при $x \in (0, \infty)$ остаточный член не превосходит по абсолютной величине первого отбрасываемого члена ряда и имеет тот же знак.

1.3. Показать, что при $x > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\operatorname{Ci}(x) + i \operatorname{Si}(x) = \frac{i\pi}{2} + \frac{e^{ix}}{ix} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!}{(ix)^s} + \theta_n(x) \frac{n!}{(ix)^n} \right\},$$

где $|\theta_n(x)| \leq 2$.

1.4. С помощью упр. 4.3 из главы 2 показать, что асимптотическое разложение интегралов Фрепеля можно записать в виде

$$C \left\{ \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{1/2} \right\} + iS \left\{ \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{1/2} \right\} \sim \frac{1+i}{2} - \frac{ie^{ix}}{(2\pi x)^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2s-1)}{(2ix)^s} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Показать также, что если $x > 0$ и $n \geq 1$, то n -я граничная постоянная этого разложения не превосходит удвоенного абсолютного значения коэффициента при $(n+1)$ -м члене.

§ 2. Интегралы Лапласа

2.1. Один из общих типов интегралов, к которому применим метод интегрирования по частям, имеет вид

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt, \quad (2.01)$$

где функция $q(t)$ не зависит от положительного параметра x . Мы предположим, что $q(t)$ бесконечно дифференцируема в $[0, \infty)$ и для каждого s

$$q^{(s)}(t) = O(e^{\sigma t}) \quad (0 \leq t < \infty), \quad (2.02)$$

где σ — действительная постоянная, не зависящая от s .

Интеграл (2.01) сходится при $x > \sigma$. Повторное интегрирование по частям дает

$$I(x) = \frac{q(0)}{x} + \frac{q'(0)}{x^2} + \dots + \frac{q^{(n-1)}(0)}{x^n} + \varepsilon_n(x), \quad (2.03)$$

где n — произвольное неотрицательное целое число и

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} q^{(n)}(t) dt. \quad (2.04)$$

При указанных условиях

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= \frac{1}{x^n} \int_0^{\infty} e^{-xt} O(e^{\sigma t}) dt = \\ &= \frac{1}{x^n} O \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(x-\sigma)t} dt \right\} = O \left\{ \frac{1}{x^n (x-\sigma)} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$I(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{(s)}(0)}{x^{s+1}} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (2.05)$$

Менее жесткие условия, достаточные для справедливости этого результата, приведены ниже в упр. 3.3.

2.2. Если максимальное значение функции $|q^{(n)}(t)|$ достигается в точке $t = 0$, то (2.04) сразу приводит к неравенству

$$|\varepsilon_n(x)| \leq |q^{(n)}(0)| x^{-n-1} \quad (2.06)$$

при $x > 0$. Эта ситуация имеет место, например, когда $q(t) \rightarrow$

вполне монотонная функция¹⁾ в $[0, \infty)$, т. е. если

$$(-1)^s q^{(s)}(t) \geq 0 \quad (t \geq 0, s = 0, 1, 2, \dots).$$

Неравенство (2.06) можно рассматривать как частный случай признака Лейбница. Этот простой признак утверждает, что если последовательные остатки, соответствующие разложению в ряд, имеют противоположные знаки, то каждый остаток численно меньше первого отбрасываемого члена ряда и имеет тот же знак. В настоящем случае мы имеем

$$\varepsilon_n(x) - \varepsilon_{n+1}(x) = q^{(n)}(0)x^{n-1}.$$

Очевидно, что если $\varepsilon_n(x)$ и $\varepsilon_{n+1}(x)$ имеют противоположные знаки, то применимо неравенство (2.06), и $\varepsilon_n(x)$ имеет тот же самый знак, что и $q^{(n)}(0)$. Этот признак имеет более широкую, чем асимптотические разложения, область применимости; его можно использовать, например, для конечно-разностных разложений, возникающих в численном анализе²⁾.

Необходимо подчеркнуть, что указанный признак следует применять к последовательным остаткам, а не к членам ряда. Если просто известно, что $q^{(n)}(0)$ и $q^{(n+1)}(0)$ имеют противоположные знаки, то соотношение

$$\varepsilon_n(x) = \frac{q^{(n)}(0)}{x^{n+1}} + \frac{q^{(n+1)}(0)}{x^{n+2}} + O\left(\frac{1}{x^{n+3}}\right)$$

показывает, что неравенство (2.06) справедливо для всех $x > X_n$, когда X_n достаточно велико. Однако фактическое значение X_n из этих рассуждений получить нельзя.

2.3. Если функции $|q^{(n)}(t)|$ не мажорируются величинами $|q^{(n)}(0)|$, то мы можем рассмотреть очевидное обобщение

$$|\varepsilon_n(x)| \leq C_n x^{n-1} \quad (x > 0), \quad (2.07)$$

где

$$C_n = \sup_{(0, \infty)} |q^{(n)}(t)|.$$

Однако очень часто величины C_n бесконечны или же настолько велики по сравнению с $|q^{(n)}(0)|$, что эта оценка чрезмерно превосходит действительную ошибку. В этом случае предпочтительнее рассматривать мажоранту вида

$$|q^{(n)}(t)| \leq |q^{(n)}(0)| e^{an^t} \quad (0 \leq t < \infty), \quad (2.08)$$

¹⁾ Некоторые общие свойства этих функций получены Уиддером (1941, глава 4), а также ван дер Корпутом и Франклином (1951). См. также ниже упр. 2.1—2.3.

²⁾ Стеффенсен (1927, § 4).

в которой величины σ_n не зависят от t . Подстановка этой мажоранты в (2.04) приводит к неравенству

$$|e_n(x)| \leq \frac{|q^{(n)}(0)|}{x^n(x - \sigma_n)} \quad (x > \max(\sigma_n, 0)). \quad (2.09)$$

Принятое ранее условие $x > \sigma$ не является здесь необходимым, поскольку повторные интегрирования формулы (2.08) показывают, что при $s < n$ и большим t производные $q^{(s)}(t)$ имеют порядок $O(e^{\sigma_n t})$, $O(t^{n-s})$ или $O(t^{n-s-1})$, когда значения σ_n соответственно положительны, равны нулю или отрицательны. В любом случае формула (2.03) справедлива при $x > \max(\sigma_n, 0)$.

Наилучшее значение σ_n определяется, очевидно, равенством

$$\sigma_n = \sup_{(0, \infty)} \left\{ \frac{1}{t} \ln \left| \frac{q^{(n)}(t)}{q^{(n)}(0)} \right| \right\}. \quad (2.10)$$

При условии (2.02) это значение конечно, если $q^{(n)}(0) \neq 0$. В противном случае следует рассмотреть не равный нулю член ряда с большим номером.

В отличие от (2.07), отношение правой части (2.09) к фактическому значению $|e_n(x)|$ стремится к единице при $x \rightarrow \infty$. Необходимость вычислять производные $q(t)$ является недостатком. Метод, изложенный в § 9, устраняет эту необходимость.

2.4. В качестве иллюстрации оценки остатка, указанной в предыдущем пункте, рассмотрим снова разложение неполной гамма-функции. Если положить $t = x(1 + \tau)$ и $q(\tau) = (1 + \tau)^{\alpha-1}$, то формула (1.02) принимает вид

$$e^x x^{-\alpha} e_n(x) = x^{-n} \int_0^{\infty} e^{-x\tau} q^{(n)}(\tau) d\tau \quad (x > 0) \quad (2.11)$$

(ср. (2.04)). Из (2.10) имеем

$$\sigma_n = \sup_{\tau \in (0, \infty)} \left\{ (\alpha - n - 1) \frac{\ln(1 + \tau)}{\tau} \right\}. \quad (2.12)$$

Если $\alpha - n - 1 \leq 0$, то непосредственно видно, что эта верхняя грань достигается при $\tau = \infty$ и равна нулю. Это приводит к тому же результату, какой был получен в § 1.1.

В случае $\alpha - n - 1 > 0$ выражение в скобках положительно. Поскольку пределы функций $\ln(1 + \tau)$ и τ равны в точке $\tau = 0$, а вторая функция убывает быстрее первой, максимальное значение достигается при $\tau \rightarrow 0$. Следовательно, $\sigma_n = \alpha - n - 1$, и из формул (2.09) и (2.11) вытекает оценка

$$|e_n(x)| \leq \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n) e^{-x} x^{\alpha - n}}{x - \alpha + n + 1} \quad (x > \alpha - n - 1 > 0). \quad (2.13)$$

Кроме того, как следует из (2.11), остаток $\varepsilon_n(x)$ при этих условиях положителен. Оценка (2.13) несколько слабее по сравнению с § 1.2, но имеет более удобный вид. В частном случае при $n=0$

$$\Gamma(\alpha, x) \leq \frac{e^{-x} x^\alpha}{x - \alpha + 1} \quad (\alpha > 1, x > \alpha - 1) \quad (2.14)$$

(ср. (1.05)).

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Показать, что сумма и произведение двух вполне монотонных функций являются вполне монотонными функциями.

2.2. Показать, что если $q(t) > 0$, а $q'(t)$ — вполне монотонная функция, то $1/q(t)$ — также вполне монотонная функция.

2.3. Пусть функция $q(t)$ неотрицательна и непрерывна при $t > 0$ и каждый из ее моментов $\int_0^\infty t^s q(t) dt$, $s=0, 1, 2, \dots$, конечен. Показать, что функция

$l(x)$, определенная равенством (2.01), вполне монотонна в $(0, \infty)$.

2.4. Доказать, что

$$\int_0^\infty e^{-xsh} dt \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2s-1)^2}{x^{2s+1}}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

2.5. Доказать, что

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^2 (x + \ln t)^{1/3}} \sim x^{-1/3} \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3s-2)}{(3x)^s}, \quad (x \rightarrow \infty).$$

Показать также, что для всех положительных x остаточный член меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак.

2.6. Показать, что

$$\int_0^\sigma \exp \{ -xt + (1+t)^{1/2} \} dt = \frac{e}{x} \{ 1 + \delta(x) \},$$

где

$$0 < \delta(x) \leq \{ 2(x - \sigma) \}^{-1} \quad (x > \sigma);$$

$$\sigma = \sup_{(0, \infty)} \left[\frac{(1+t)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \ln(1+t)}{t} \right].$$

Оценить численное значение σ , вычислив последнее выражение при $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 25, \infty$.

§ 3. Лемма Ватсона

3.1. Разложение (2.05) может быть получено прямой постановкой ряда Маклорена

$$q(t) = q(0) + tq'(0) + t^2 \frac{q''(0)}{2!} + \dots \quad (3.01)$$

для функции $q(t)$ в (2.01) и почленным интегрированием. Конечно, это не является доказательством; разложение (3.01) может даже не быть справедливым во всем интервале интегрирования. Но этот формальный метод наводит на мысль об одном естественном обобщении: нельзя ли получить аналогичный асимптотический результат почленным интегрированием и в случае, когда разложение $q(t)$ около точки $t = 0$ производится по нецелым степеням t ?

Утвердительный ответ был дан Ватсоном (1918a). Он обнаружил, что несущественно, являются или нет показатели степени в разложении $q(t)$ целыми или вообще равноотстоящими, а также сходятся ли они или являются просто асимптотическими. Общий результат достаточно хорошо описывается следующей теоремой, которая, вероятно, является утверждением, наиболее часто используемым при выводе асимптотических разложений.

3.2. Теорема 3.1. Пусть $q(t)$ — функция положительной переменной t и

$$q(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (t \rightarrow 0), \quad (3.02)$$

где λ и μ — положительные постоянные. Тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt \sim \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3.03)$$

при условии, что этот интеграл сходится при всех достаточно больших x .

Мы можем сказать, что разложение (3.02) индуцирует разложение (3.03). Сформулированные условия позволяют функции $q(t)$ иметь конечное число разрывов и точек, в которых она может обращаться в бесконечность где угодно в области интегрирования, включая точку $t = 0$. Сходимость интеграла при $t = 0$ для всех x гарантируется условием (3.02).

Эту теорему нельзя доказать прямым применением метода интегрирования по частям. Вместо этого мы поступим следующим образом. Определим для каждого неотрицательного целого числа n функцию

$$\varphi_n(t) = q(t) - \sum_{s=0}^{n-1} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (t > 0). \quad (3.04)$$

Умножая обе части равенства на e^{-xt} и интегрируя с помощью интеграла Эйлера, мы получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} q(t) dt = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} + \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi_n(t) dt. \quad (3.05)$$

Интеграл в правой части существует для всех достаточно больших x , так как это утверждение верно для интеграла в левой части (по условию).

При $t \rightarrow 0$ имеем $\varphi_n(t) = O(t^{(n+\lambda-\mu)/\mu})$. Это означает, что существуют такие положительные числа k_n и K_n , для которых

$$|\varphi_n(t)| \leq K_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} \quad (0 < t \leq k_n).$$

Поэтому

$$\left| \int_0^{k_n} e^{-xt} \varphi_n(t) dt \right| \leq K_n \int_0^{k_n} e^{-xt} t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} dt < \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{K_n}{x^{(n+\lambda)/\mu}}. \quad (3.06)$$

Чтобы оценить вклад от интервала $[k_n, \infty)$, выберем такое значение X переменной x , для которого интеграл $\int_0^\infty e^{-Xt} \varphi_n(t) dt$ сходится, и напомним

$$\Phi_n(t) = \int_{k_n}^t e^{-Xv} \varphi_n(v) dv,$$

так что функция $\Phi_n(t)$ непрерывна и ограничена в $[k_n, \infty)$. Обозначим через L_n точную верхнюю грань $|\Phi_n(t)|$ в этой области. Если $x > X$, то после интегрирования по частям мы находим

$$\begin{aligned} \int_{k_n}^\infty e^{-xt} \varphi_n(t) dt &= \int_{k_n}^\infty e^{-(x-X)t} e^{-Xt} \varphi_n(t) dt = \\ &= (x-X) \int_{k_n}^\infty e^{-(x-X)t} \Phi_n(t) dt. \end{aligned} \quad (3.07)$$

Поэтому

$$\left| \int_{k_n}^\infty e^{-xt} \varphi_n(t) dt \right| \leq (x-X) L_n \int_{k_n}^\infty e^{-(x-X)t} dt = L_n e^{-(x-X)k_n}. \quad (3.08)$$

Объединяя формулы (3.06) и (3.08), мы видим, что интеграл в правой части (3.05) имеет порядок $O(x^{-(n+\lambda)/\mu})$ при $x \rightarrow \infty$, и теорема доказана.

Оценки остаточного члена для разложения (3.03) будут даны позднее в этой главе (§ 9).

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} dt \sim \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2s-1)^2}{s! (8x)^s} \quad (x \rightarrow \infty).$$

3.2. В обозначениях упр. 3.5 из главы 2 показать, что

$$E_x(x) \sim e^{-x} \sum_{s=1}^{\infty} e_s x^{-s} \quad (x \rightarrow \infty),$$

где $e_1 = 1/2$, $e_2 = 1/8$, $e_3 = -1/32$, $e_4 = -1/128$ [Эйри, 1937].

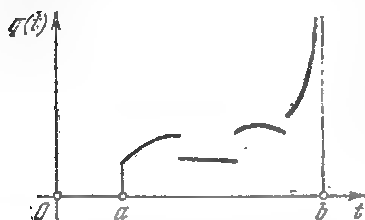
3.3. Пусть интеграл (2.01) сходится при всех достаточно больших x . Показать, что достаточным условием того, чтобы разложение (2.05) было асимптотическим разложением до n -го члена, является непрерывность $q^{(n)}(t)$ в окрестности точки $t = 0$.

3.4. Предположим, что $q(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, но имеет простой полюс во внутренней точке интервала $(0, \infty)$.

Доказать, что формула (3.03) применима при условии, что для интеграла рассматривается главное значение в смысле Коши.

§ 4. Лемма Римана — Лебега

4.1. Предположим, что в окрестности конечной точки d исключая, возможно, саму точку d , функция $q(t)$ непрерывна. Кроме того, допустим, что при $t \rightarrow d$ слева существует предельное значение $q(d-0)$; аналогично существует $q(d+0)$ при $t \rightarrow d$ справа.

Рис. 4.1. Кусочно-непрерывность в $[a, b]$.

Если $q(d-0) \neq q(d+0)$, то d называется точкой разрыва в виде скачка. Если $q(d-0) = q(d+0)$, но $q(d) \neq q(d-0)$ или $q(d)$ не существует, то d называется точкой устранимого разрыва. Например, при $t = 0$ функция, определенная условиями

$$q(t) = 0 \quad (t < 0),$$

$$q(0) = 1/2, \quad q(t) = 1 \quad (t > 0),$$

имеет разрыв в виде скачка, а ее производная имеет устранимый разрыв.

Простым разрывом называется либо разрыв в виде скачка, либо устранимый разрыв.

Далее, предположим, что функция $q(t)$ непрерывна в конечном или бесконечном интервале (a, b) , исключая конечное число простых разрывов. В этом случае мы говорим, что функция $q(t)$ кусочно-непрерывна в (a, b) . Если, кроме того, число a конечно, а $q(a+0)$ существует, то функция $q(t)$ называется кусочно-непрерывной в $[a, b]$; сравните рис. 4.1. Аналогичные определения можно дать для интервалов $(a, b]$ и $[a, b]$.

4.2. Излагая асимптотическую теорию определенных интегралов от осциллирующих функций, мы часто будем пользоваться следующей теоремой, называемой также *леммой Римана — Лебега*.

Теорема 4.1. 1) Пусть функция $q(t)$ кусочно непрерывна в компактном интервале $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b e^{ixt} q(t) dt = o(1) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4.01)$$

2) Пусть a конечно или равно $-\infty$, b — конечно или равно $+\infty$, а функция $q(t)$ — непрерывна в (a, b) , исключая, возможно, конечное число точек. Тогда формула (4.01) также справедлива при условии, что интеграл равномерно сходится в a, b и в упомянутых точках при всех достаточно больших x .

Два момента в этом утверждении заслуживают внимания. Прежде всего, результат 2) включает 1) в качестве частного случая. Во вторых, если интеграл (4.01) сходится абсолютно, то он обязательно сходится и равномерно; с другой стороны, легко проверить интегрированием по частям, что, например, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{ixt}}{t^\delta} dt \quad (0 < \delta < 1) \quad (4.02)$$

равномерно сходится на обоих пределах при $x \geq X$ ($X > 0$), но не сходится абсолютно на верхнем пределе.

Чтобы доказать утверждение 1), заметим, что достаточно установить этот результат, когда функция $q(t)$ непрерывна в $[a, b]$; обобщение на кусочно-непрерывные функции производится с помощью разбиения области интегрирования и затем суммирования. Если функция $q(t)$ непрерывна в $[a, b]$, то она автоматически равномерно непрерывна в этом интервале. Это означает, что для каждого положительного числа ε найдется конечное число точек деления t_s , для которых

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

и

$$|q(t) - q(t_s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (t_{s-1} \leq t \leq t_s)$$

при $s = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\int_a^b e^{ixt} q(t) dt = \sum_{s=1}^n q(t_s) \int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{ixt} dt + \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} e^{ixt} \{q(t) - q(t_s)\} dt.$$

Обозначим через Q максимальное значение $|q(t)|$ в $[a, b]$.

Поскольку

$$\left| \int_a^b e^{ixt} dt \right| = \left| \frac{e^{ix\beta} - e^{ix\alpha}}{ix} \right| \leq \frac{2}{x} \quad (x > 0)$$

для любых действительных чисел α и β , мы имеем

$$\left| \int_a^b e^{ixt} q(t) dt \right| \leq \frac{2Qn}{x} + \sum_{s=1}^n (t_s - t_{s-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{2Qn}{x} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

если $x > 4Qn/\varepsilon$.

Докажем утверждение 2). Пусть d_1, d_2, \dots, d_m — внутренние точки интервала (a, b) , расположенные в порядке возрастания, в которых функция $q(t)$ разрывна или бесконечна. При этих условиях существуют такие конечные точки α_s и β_s , что

$$a = \alpha_0 < \beta_0 < d_1 < \alpha_1 < \beta_1 < d_2 < \dots < d_m < \alpha_m < \beta_m < b$$

и каждый из интегралов

$$\int_{\alpha_s}^{\beta_s} e^{ixt} q(t) dt, \quad \int_{\beta_m}^b e^{ixt} q(t) dt, \quad \int_{\beta_s}^{\alpha_{s+1}} e^{ixt} q(t) dt$$

$$(s = 0, 1, \dots, m-1)$$

ограничен по абсолютной величине числом ε при всех x , больших некоторого X . Для завершения доказательства следует к каждому из интервалов $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 0, 1, \dots, m$, применить результат 1).

УПРАЖНЕНИЕ

4.1. Пусть функция $q(t)$ непрерывна в $[0, \infty)$, $q'(t)$ абсолютно интегрируема в том же интервале и $q(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Доказать, что интеграл $\int_0^\infty e^{ixt} q(t) dt$ равномерно сходится для всех достаточно больших x .

§ 5. Интегралы Фурье

5.1. Вторым типом интегралов, к которым может быть непосредственно применен метод интегрирования по частям, являются интегралы Фурье с конечными пределами

$$I(x) = \int_a^b e^{ixt} q(t) dt, \quad (5.01)$$

где a, b и $q(t)$ не зависят от положительного параметра x .

Если функция $q(t)$ непрерывна, а $q'(t)$ — абсолютно интегрируема в $[a, b]$, то

$$I(x) = \frac{i}{x} \{e^{iax} q(a) - e^{ibx} q(b)\} + \varepsilon_1(x), \quad (5.02)$$

где

$$\varepsilon_1(x) = \frac{i}{x} \int_a^b e^{ixt} q'(t) dt. \quad (5.03)$$

Последний интеграл сходится абсолютно и равномерно, и поэтому в силу теоремы 4.1 $\varepsilon_1(x) = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow \infty$.

Далее, если все производные $q(t)$ непрерывны в $[a, b]$, то после n -кратного интегрирования по частям получаем

$$I(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{i}{x}\right)^{s+1} \{e^{iax} q^{(s)}(a) - e^{ibx} q^{(s)}(b)\} + \varepsilon_n(x), \quad (5.04)$$

где

$$\varepsilon_n(x) = \left(\frac{i}{x}\right)^n \int_a^b e^{ixt} q^{(n)}(t) dt. \quad (5.05)$$

В этом случае $\varepsilon_n(x) = o(x^{-n})$ снова в силу леммы Римана — Лебега. Следовательно, выражение (5.04) является асимптотическим разложением $I(x)$ при больших x^1 .

5.2. Полученные результаты легко обобщаются на бесконечную область интегрирования. Предположим, что все производные $q(t)$ непрерывны в $[a, \infty)$ и каждый из интегралов

$$\int_a^\infty e^{ixt} q^{(s)}(t) dt \quad (s = 0, 1, \dots)$$

равномерно сходится при всех достаточно больших x . Полагая $b \rightarrow \infty$ в (5.02) и (5.03), мы видим, что функция $e^{ibx} q(b)$ должна стремиться к постоянному предельному значению, а так как x принимает более чем одно значение, то $q(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Применение теоремы 4.1 приводит теперь к формуле

$$I(x) = \frac{ie^{iax}}{x} q(a) + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Проведенные рассуждения можно последовательно повторить для $n = 1, 2, \dots$ в (5.04) и (5.05). При этом мы получим

$$I(x) \sim \frac{ie^{iax}}{x} \sum_{s=0}^{\infty} q^{(s)}(a) \left(\frac{i}{x}\right)^s \quad (x \rightarrow \infty).$$

¹⁾ Сравните упр. 7.1 из главы 1.

5.3. В конечной области интегрирования можно дать простую оценку для остаточного члена (5.05):

$$|\varepsilon_n(x)| \leq (b-a) Q_n x^{-n}, \quad Q_n \equiv \max_{[a,b]} |q^{(n)}(t)|.$$

Однако эта оценка часто бывает слишком завышенной и лучше использовать оценку

$$|\varepsilon_n(x)| \leq x^{-n} \gamma_{a,b}^{(n)}(q^{(n-1)}).$$

Оценка такого вида применима и в случае, когда область интегрирования бесконечна.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Используя (5.04) при $n = 3$, доказать, что

$$\int_0^{\infty} e^{ixsh} dt = \frac{i}{x} + \varepsilon(x), \quad \text{где } |\varepsilon(x)| \leq \left(2 + \frac{16}{25} \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \frac{1}{x^3}.$$

5.2. Доказать, что если $x > 0$, а n — любое неотрицательное число, то

$$\left| \int_0^1 e^{-ixt} \ln(1+t) dt - \frac{i}{x} e^{-ix} \ln 2 - \sum_{s=0}^{n-1} s! \left(1 - \frac{e^{-ix}}{2^{s+1}}\right) \left(\frac{i}{x}\right)^{s+2} \right| \leq 2 \frac{n!}{x^{n+2}}.$$

§ 6. Примеры; случаи, когда метод неэффективен

6.1. Следует соблюдать особую осторожность при оценке остатков разложений, полученных в предыдущем пункте. Это можно продемонстрировать на следующем примере¹⁾.

Рассмотрим интеграл

$$I(m) = \int_0^{\pi} \frac{\cos mt}{t^2 + 1} dt, \quad (6.01)$$

в котором m — большое положительное целое число. Применение результатов § 5.1 при $q(t) = \frac{1}{1+t^2}$ дает

$$I(m) \sim (-1)^m \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{q^{(2s+1)}(\pi)}{m^{2s+2}} \quad (m \rightarrow \infty), \quad (6.02)$$

¹⁾ Олвер (1964а).

поскольку $q^{(2s+1)}(0) = 0$. Первые три четные производные функции $q(t)$ имеют вид

$$q'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}, \quad q^{(3)}(t) = -\frac{24(t^3-t)}{(t^2+1)^4},$$

$$q^{(5)}(t) = -\frac{240(3t^5-10t^3+3t)}{(t^2+1)^6},$$

откуда можно получить значения

$$q'(\pi) = -0,05318, \quad q^{(3)}(\pi) = -0,04791, \quad q^{(5)}(\pi) = -0,08985,$$

верные с точностью до пяти десятичных знаков. Поэтому при $m = 10$ первые три члена разложения (6.2) дают вклад

$$-0,0005318 + 0,0000048 - 0,0000001 = -0,0005271. \quad (6.03)$$

Но этот внешне правдоподобный ответ совершенно неверен, поскольку прямое численное интегрирование интеграла (6.01) показывает, что с точностью до семи десятичных знаков

$$I(10) = -0,0004558. \quad (6.04)$$

Это расхождение целиком обусловлено тем, что мы пренебрегли остаточным членом. Если обрезать (6.02) на элементе с номером $s = n-1$, то остаток имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2n}(m) &= \frac{(-1)^n}{m^{2n}} \int_0^\pi \cos(mt) q^{(2n)}(t) dt = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{m^{2n+1}} \int_0^\pi \sin(mt) q^{(2n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\varepsilon_{2n}(m)| \leq \mathcal{V}_{0,\pi}(q^{(2n)})/m^{2n+1}. \quad (6.05)$$

При $n = 2$

$$q^{(4)}(t) = 24(5t^4 - 10t^2 + 1)/(t^2 + 1)^5.$$

Стационарными точками этой функции являются нули $q^{(5)}(t)$. В рассматриваемом интервале лежат нули $t = 0, 1/\sqrt{3}, \sqrt{3}$; вычисления дают

$$\begin{aligned} q^{(4)}(0) &= 24,00, \quad q^{(4)}(1/\sqrt{3}) = -10,12, \\ q^{(4)}(\sqrt{3}) &= 0,38, \quad q^{(4)}(\pi) = 0,06. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{V}_{0,\pi}(q^{(4)}) = 44,94$ и оценка (6.05) принимает вид

$$|\varepsilon_4(10)| \leq 0,00045.$$

Величина правой части говорит о том, что сумма (6.03) может иметь значительную погрешность (хотя действительная погрешность удовлетворяет этой оценке).

6.2. Существенное улучшение разложения (6.02) можно получить, если использовать тождество

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mt}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \pi e^{-m}, \quad (6.06)$$

которое легко проверить с помощью контурного интегрирования. Сложение с (6.01) дает

$$I(m) = \frac{1}{2} \pi e^{-m} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos mt}{t^2 + 1} dt.$$

Применяя к последнему интегралу метод § 5, мы получаем

$$I(m) = \frac{1}{2} \pi e^{-m} + (-1)^m \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{q^{(2s+1)}(\pi)}{m^{2s+2}} + \eta_{2n}(m), \quad (6.07)$$

где новый остаточный член имеет оценку

$$|\eta_{2n}(m)| \leq \mathcal{V}_{\pi, \infty}(q^{(2n)})/m^{2n+1}. \quad (6.08)$$

Представление (6.07) отличается от (6.02) паличием члена $\pi e^{-m}/2$. При $m = 10$ этот член имеет значение 0,0000713, которое точно равно расхождению между (6.03) и точным значением (6.08) при $n = 2$: производная $q^{(4)}(t)$ не имеет стационарных точек в интервале (π, ∞) ; поэтому

$$\mathcal{V}_{\pi, \infty}(q^{(4)}) = q^{(4)}(\pi) = 0,06,$$

и оценка (6.08) принимает вид

$$|\eta_4(10)| \leq 0,0000006.$$

Причина, по которой остаточный член $\varepsilon_{2n}(m)$ в общем случае много больше, чем соответствующий остаток $\eta_{2n}(m)$, кроется в том, что производные $q(t)$ принимают в интервале $(0, \pi)$ существенно большие значения, чем в (π, ∞) . В свою очередь, это связано с тем, что в комплексной области особенности функции $q(t)$ в точках $t = \pm i$ лежат ближе к интервалу $(0, \pi)$, чем к (π, ∞) .

Из предыдущего примера можно извлечь два важных урока. Во-первых, численное использование асимптотического разложения без исследования его остаточных членов может привести к совершенно неверному ответу. Во-вторых, учет членов, экспоненциально малых по сравнению с другими членами разложения,

может существенно улучшить численный результат, даже если этими малыми членами можно пренебречь в смысле Пуанкаре¹⁾.

6.3. Последние два пункта дают пример частичной неэффективности метода интегрирования по частям при выводе удовлетворительного асимптотического разложения интеграла Фурье. Полная неэффективность может быть продемонстрирована на следующем примере²⁾. Положим

$$I(m) = \int_a^b \cos(mt) q(t) dt,$$

где a и b — целые кратные π , а все нечетные производные $q(t)$ обращаются в нуль в точках a и b . Такой вид (с соответствующими пределами) имеет интеграл (6.06). Применение метода § 5 дает

$$I(m) \sim \frac{0}{m} + \frac{0}{m^2} + \frac{0}{m^3} + \dots \quad (m \rightarrow \infty).$$

Этот результат справедлив, но бесполезен для численных и большинства аналитических целей. Аналогичный результат получается, если заменить в интеграле $\cos(mt)$ на $\sin(mt)$ и предположить, что в точках a и b обращаются в нуль четные производные функции $q(t)$.

Как и в § 6.2, при этих условиях для получения удовлетворительного приближения для $I(m)$ может оказаться необходимым обращение к методу контурного интегрирования.

6.4. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin(xt)}{t^2 + \alpha^2} h(t) dt,$$

где α — положительная постоянная, а x — большой положительный параметр. Предположим, что функция $h(t)$ действительна при действительном t и голоморфна в области, содержащей полосу $|\operatorname{Im} t| \leq \beta$, где $\beta > \alpha$. Предположим также, что

$$h(t) = O(t^{-\delta}) \quad (\operatorname{Re} t \rightarrow \pm\infty) \quad (6.09)$$

равномерно относительно $\operatorname{Im} t$ в этой полосе, причем $\delta > 0$. Тогда мы приходим к тому случаю неэффективности метода, о котором шла речь в предыдущем пункте. Это связано с тем, что функция $t h(t) (t^2 + \alpha^2)^{-1}$ имеет равномерно относительно α порядок $O(t^{-1-\delta})$ при $\operatorname{Re} t \rightarrow \pm\infty$ и поэтому все ее производные³⁾ стремятся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$; сравните упр. 4.7 из главы 1,

¹⁾ См. § 7.1, гл. 1. — *Прим. ред.*

²⁾ На этот пример указал автору Л. Максимов.

³⁾ Входящие в члены разложения. — *Прим. ред.*

Применение теоремы о вычетах к полосе $0 \leq \operatorname{Im} t \leq \beta$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{ixt}}{t^2 + \alpha^2} h(t) dt = \pi i e^{-\alpha x} h(i\alpha) + \varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x) = \int_{\mathcal{L}} \frac{te^{ixt}}{t^2 + \alpha^2} h(t) dt,$$

причем \mathcal{L} — линия с параметрическим уравнением $t = i\beta + \tau$, $-\infty < \tau < \infty$. Очевидно, что

$$|\varepsilon(x)| \leq e^{-\beta x} \int_{\mathcal{L}} \left| \frac{th(t)}{t^2 + \alpha^2} \right| dt = O(e^{-\beta x}),$$

так как интеграл конечен в силу условия (6.09). Объединение этих результатов приводит к явному представлению

$$I(x) = \pi e^{-\alpha x} \operatorname{Re} \{h(i\alpha)\} + O(e^{-\beta x}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Пусть m — положительное целое число. Записав интеграл

$$I(m) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(mt)}{\operatorname{sh} t} dt,$$

в виде

$$\operatorname{Si}(m\pi) + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t} - \frac{1}{t} \right) \sin(mt) dt,$$

показать, что

$$I(m) \sim \frac{1}{2} \pi + \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{h_{2s}}{m^{2s}} \quad (m \rightarrow \infty),$$

где h_{2s} — значение $2s$ -й производной функции $1/\operatorname{sh} t$ в точке $t = \pi$.

Показать также, что более точное представление имеет вид

$$I(m) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e^{m\pi} + 1} + \frac{(-1)^m}{m} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{h_{2s}}{m^{2s}}.$$

6.2. Показать, что если α и β — положительные постоянные и x положительно, то

$$\int_0^{\infty} \frac{t \exp(-\rho^2 t^2) \sin(xt)}{t^2 + \alpha^2} dt = \frac{\pi}{2} \exp(\alpha^2 \rho^2 - \alpha x) + \varepsilon(x),$$

где

$$|\varepsilon(x)| \leq \pi^{1/2} \beta \exp(-\beta x + \rho^2 \beta^2 / \{2\rho(\beta^2 - \alpha^2)\}),$$

причем β — любое число, превосходящее α . Далее, предположив, что β может зависеть от x , вывести формулу

$$\varepsilon(x) = O\{x^{-1} e^{-x^2/(4\rho^2)}\}.$$

§ 7. Метод Лапласа

7.1. Рассмотрим следующее обобщение интеграла из § 2:

$$I(x) = \int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt, \quad (7.01)$$

где a , b , $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от положительного параметра x . Значения a и b могут быть бесконечными. Возникновение изложенного ниже эффективного метода аппроксимации $I(x)$ связано с именем Лапласа (1820). Максимальное значение (пик) множителя $e^{-xp(t)}$ достигается в точке $t = t_0$, в которой $p(t)$ имеет минимум. Если x велико, то этот пик очень острый, и график подынтегрального выражения подсказывает, что преобладающая часть вклада в интеграл определяется окрестностью точки t_0 . Поэтому мы заменяем $p(t)$ и $q(t)$ главными членами их разложений в ряды по возрастающим степеням разности $t - t_0$, а затем, в зависимости от условий, расширяем пределы интегрирования до $-\infty$ или $+\infty$. Получающийся интеграл вычисляется явно и дает искомое приближение.

Предположим, например, что $t_0 = a$, $p'(a) > 0$ и $q(a) \neq 0$. Тогда указанная процедура выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} I(x) &\approx \int_a^b e^{-x\{p(a) + (t-a)p'(a)\}} q(a) dt \approx \\ &\approx q(a) e^{-xp(a)} \int_0^{\infty} e^{-x(t-a)p'(a)} dt = \frac{q(a) e^{-xp(a)}}{xp'(a)}. \end{aligned} \quad (7.02)$$

С другим общим случаем мы встречаемся, если $p(t)$ имеет простой минимум во внутренней точке t_0 интервала (a, b) и $q(t_0) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} I(x) &\approx \int_a^b \exp \left[-x \left\{ p(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 p''(t_0) \right\} \right] q(t_0) dt \approx \\ &\approx q(t_0) e^{-xp(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x (t - t_0)^2 p''(t_0) \right\} dt = \\ &= q(t_0) e^{-xp(t_0)} \left\{ \frac{2\pi}{xp''(t_0)} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.03)$$

Следует отметить, что при построении этих приближений предположение о том, что только окрестность пика играет важную роль, использовалось дважды: во-первых, при замене $p(t)$ и $q(t)$ главными членами их разложений по степеням $t - t_0$, и, во-вторых, при замене b на ∞ и в формуле (7.03) a на $-\infty$.

7.2. Предыдущие рассуждения являются эвристическими. Сформулировав точные условия на $p(t)$ и $q(t)$, мы докажем, что приближение Лапласа является асимптотическим для данного интеграла при $x \rightarrow \infty$. Без потери общности можно предположить, что значение a конечно, а минимум функции $p(t)$ достигается в точке $t = a$: в других случаях область интегрирования можно разбить на части точками минимума и максимума функции $p(t)$ и, если это необходимо, изменить знак t .

Предположим, что пределы a и b не зависят от x , значение a конечно, а $b(>a)$ — конечно или бесконечно. Функции $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от x , причем $p(t)$ действительна, а $q(t)$ — действительна или комплекснозначна. Кроме того:

1) $p(t) > p(a)$ при $t \in (a, b)$ и для каждого $c \in (a, b)$ точная нижняя грань разности $p(t) - p(a)$ в $[c, b)$ положительна¹⁾;

2) $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны в окрестности точки a , исключая, возможно, саму точку a ;

3) при $t \rightarrow a$ справа

$$p(t) - p(a) \sim P(t-a)^\mu, \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1},$$

и первое из этих соотношений допускает дифференцирование. Здесь P , μ и λ — положительные постоянные (целые или нет), а $Q \neq 0$ — действительная или комплексная постоянная;

4) интеграл

$$I(x) \equiv \int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt \quad (7.04)$$

абсолютно сходится во всей области интегрирования при всех достаточно больших x .

Теорема 7.1²⁾). При сформулированных условиях

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{-xp(a)}}{(px)^{\lambda/\mu}} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (7.05)$$

Переходим к доказательству.

7.3. Условия 2) и 3) показывают, что можно найти такое число k , достаточно близкое к a , что в интервале $(a, k]$ функция $p'(t)$ непрерывна и положительна, а $q(t)$ — непрерывна. Поскольку $p(t)$ возрастает в (a, k) , мы можем взять

$$v = p(t) - p(a)$$

в качестве новой переменной интегрирования в этом интервале.

¹⁾ Другими словами, $p(t)$ достигает минимума лишь в a .

²⁾ Эрдейи (1962, § 2.4).

Тогда $v(t)$ и $t(v)$ — непрерывные функции и

$$e^{xp(a)} \int_a^k e^{-xp(t)} q(t) dt = \int_0^{\kappa} e^{-xv} f(v) dv, \quad (7.06)$$

где

$$\kappa = p(k) - p(a), \quad f(v) = q(t) \frac{dt}{dv} = \frac{q(t)}{p'(t)}. \quad (7.07)$$

Очевидно, что значение κ конечно и положительно, а функция $f(v)$ непрерывна при $v \in (0, \kappa)$.

Поскольку $v \sim P(t-a)^{\lambda}$ при $t \rightarrow a$, мы имеем¹⁾

$$t-a \sim (v/P)^{1/\lambda} \quad (v \rightarrow +0).$$

И, следовательно,

$$f(v) \sim \frac{Q v^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \quad (v \rightarrow +0). \quad (7.08)$$

Используя это соотношение, мы переписываем интеграл (7.06) в виде

$$\int_0^{\kappa} e^{-xv} f(v) dv = \frac{Q}{\mu P^{\lambda/\mu}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-xv} v^{(\lambda/\mu)-1} dv - \varepsilon_1(x) \right\} + \varepsilon_2(x), \quad (7.09)$$

где

$$\varepsilon_1(x) = \int_{\kappa}^{\infty} e^{-xv} v^{(\lambda/\mu)-1} dv, \quad \varepsilon_2(x) = \int_0^{\kappa} e^{-xv} \left\{ f(v) - \frac{Q v^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \right\} dv.$$

Первый член в правой части (7.09) можно вычислять с помощью интеграла Эйлера; он сразу даст искомое приближение (7.05).

Далее, пусть дано произвольное положительное число ε ; сделаем κ достаточно маленьким (выбирая k достаточно близко к a), чтобы

$$\left| f(v) - \frac{Q v^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \right| < \varepsilon \frac{|Q| v^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \quad (0 < v \leq \kappa);$$

сравните (7.08). Теперь, используя снова интеграл Эйлера, мы выводим неравенство

$$|\varepsilon_2(x)| < \varepsilon \frac{|Q|}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{(Px)^{\lambda/\mu}}. \quad (7.10)$$

¹⁾ См. теорему 5.1 из главы 1.

В-третьих, имеем

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x^{\lambda/\mu}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}, \kappa x\right) = O\left(\frac{e^{-\kappa x}}{x}\right) \quad (7.11)$$

при больших x , где $\Gamma(\lambda/\mu, \kappa x)$ — неполная гамма-функция; сравните (1.04).

Наконец, пусть X — значение параметра x , при котором интеграл $I(x)$ абсолютно сходится; положим

$$\eta \equiv \inf_{[k, b]} \{p(t) - p(a)\}. \quad (7.12)$$

В силу условия 1) значение η положительно. Полагая $x \geq X$, имеем

$$\begin{aligned} xp(t) - xp(a) &= (x - X) \{p(t) - p(a)\} + X \{p(t) - p(a)\} \geq \\ &\geq (x - X) \eta + Xp(t) - Xp(a) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left| e^{xp(a)} \int_k^b e^{-xp(t)} q(t) dt \right| \leq e^{-(x-X)\eta + Xp(a)} \int_k^b e^{-Xp(t)} |q(t)| dt. \quad (7.13)$$

Доказательство теоремы 7.1 будет завершено, если мы сделаем x настолько большим, что правые части выражений (7.11) и (7.13) станут меньше $\varepsilon x^{-\lambda/\mu}$; это всегда возможно, так как κ и η — положительные.

7.4. В качестве примера рассмотрим модифицированную функцию Бесселя целого порядка

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos(nt) dt;$$

сравните упр. 10.1 из главы 2. В обозначениях § 7.2

$$p(t) = -\cos t, \quad q(t) = \pi^{-1} \cos(nt).$$

Очевидно, что $p(t)$ возрастает при $0 < t < \pi$ и условия 1) и 2) удовлетворены. Условие 4) не используется. При $t \rightarrow 0$

$$p(t) = -1 + \frac{1}{2} t^2 + O(t^4), \quad q(t) = \pi^{-1} + O(t^2).$$

Следовательно, $p(a) = -1$, $P = 1/2$, $\mu = 2$, $Q = \pi^{-1}$ и $\lambda = 1$. Поэтому теорема 7.1 дает

$$I_n(x) \sim (2\pi x)^{-1/2} e^x \quad (x \rightarrow \infty, n \text{ фиксировано}).$$

Следующие члены этого приближения приведены ниже в упр. 8.5 (при $n = 0$) и в § 8.2 главы 7 (для произвольного n).

7.5. Более сложный пример ¹⁾ дается интегралом

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{xt - (t-1)\ln t} dt.$$

Прежде всего отметим, что очевидный выбор $p(t) = -t$ бесплоден, поскольку $-t$ не имеет минимумов в области интегрирования. Поэтому мы рассмотрим максимальное значение (пик) *всего* подынтегрального выражения. Оно находится из уравнения

$$x - 1 - \ln t + \frac{1}{t} = 0.$$

При больших x подходящий корень этого уравнения имеет вид

$$t \sim e^{x-1} = \xi.$$

Для применимости изложенной выше теории необходимо, чтобы положение максимума функции, стоящей в показателе экспоненты, не зависело от x . Поэтому мы возьмем $\tau = t/\xi$ в качестве новой переменной интегрирования ($\xi = e^{x-1}$), так что

$$I(x) = \xi^2 \int_0^{\infty} e^{-\xi p(\tau)} q(\tau) d\tau, \quad (7.14)$$

где

$$p(\tau) = \tau(\ln \tau - 1), \quad q(\tau) = \tau.$$

Единственный минимум функции $p(\tau)$ находится в точке $\tau = 1$. Разложение по степеням $\tau - 1$ имеет вид

$$p(\tau) = -1 + \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 - \frac{1}{6}(\tau - 1)^3 + \dots, \quad q(\tau) = 1 + (\tau - 1).$$

Поэтому в обозначениях § 7.2 $p(a) = -1$, $P = 1/2$, $\mu = 2$, $Q = 1$ и $\lambda = 1$. Следовательно, общая формула (7.05) дает

$$\int_1^{\infty} e^{-\xi p(\tau)} q(\tau) d\tau \sim \left(\frac{\pi}{2\xi}\right)^{1/2} e^{\xi}.$$

Заменяя τ на $2 - \tau$, мы видим, что то же самое асимптотическое приближение справедливо и для соответствующего интеграла по области $0 \leq \tau \leq 1$. Подстановка этих результатов в (7.14) и переход к первоначальной переменной x приводит к искомому результату

$$I(x) \sim (2\pi)^{1/2} e^{3(x-1)/2} \exp(e^{x-1}) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (7.15)$$

Читателю рекомендуется внимательно разобраться во всех этапах решения этого примера, поскольку они часто встречаются

¹⁾ См. Евграфов (1962, стр. 27).

в других примерах и методах. Во-первых, уравнение для абсциссы точки максимума было составлено на основе всего подынтегрального выражения. Во-вторых, это трансцендентное уравнение было решено асимптотически при больших x ; обозначим это решение через $t = \xi(x)$. В-третьих, была введена новая переменная интегрирования $\tau = t/\xi(x)$ для того, чтобы сделать (приближенное) положение нового максимума не зависящим от параметра x .

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Используя интеграл, указанный в упр. 7.9 из главы 2, показать, что при фиксированном положительном α и большом n полиномы Лежандра $P_n(\operatorname{sh} \alpha)$ можно приблизить функциями $(2\pi \operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} e^{n\alpha + (\alpha/2)}$.

7.2. ¹⁾ Пусть $A_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-vt - x \operatorname{sh} t} dt$. Показать, что

$$A_\nu(x) \sim 1/x \quad (x \rightarrow \infty, \nu \text{ фиксировано})$$

и

$$A_\nu(a\nu) \sim 1/(a\nu + \nu)$$

($\nu \rightarrow \infty$, a фиксировано и неотрицательно).

Показать также, что если a фиксировано, $\nu \rightarrow \infty$, то $A_\nu(a\nu)$ имеет асимптотические приближения вида

$$\frac{1}{a\nu} \frac{1}{\nu^{1/3}} \left(\frac{2}{9}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{\nu^{1/3}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{1 + (1 - a^2)^{1/2}}{a}\right)^\nu \times \\ \times \frac{\exp\{-\nu(1 - a^2)^{1/2}\}}{(1 - a^2)^{1/4}}$$

в соответствии с условиями $a > 1$, $a = 1$ или $0 < a < 1$.

7.3. Пусть α и β — постоянные, причем $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 0$. Показать, что для больших положительных значений x

$$\int_0^\infty \exp(-t - xt^\alpha) t^{\beta-1} dt \sim \frac{\Gamma(\beta/\alpha)}{\alpha x^{\beta/\alpha}}$$

и

$$\int_0^\infty \exp(-t + xt^\alpha) t^{\beta-1} dt \sim$$

$$\sim \left(\frac{2\pi}{1-\alpha}\right)^{1/2} (\alpha x)^{(2\beta-1)/(2-2\alpha)} \exp\{(1-\alpha)(\alpha^\alpha x)^{1/(1-\alpha)}\} \quad [\text{Бокхум, 1933}].$$

7.4. Показать, что

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} \ln t \, dt \sim (2\pi)^{1/2} e^{-x} x^{x+1/2} \ln x \quad (x \rightarrow \infty).$$

¹⁾ Этот интеграл связан с так называемыми функциями Ангера (ср. ниже упр. 13.3).

7.5. Предположим, при условиях § 7.2, что при $t \rightarrow a + 0$

$$p'(t) = \mu P(t-a)^{\mu-1} + O\{(t-a)^{\mu_1-1}\},$$

$$q(t) = Q(t-a)^{\lambda-1} + O\{(t-a)^{\lambda_1-1}\},$$

где $\mu_1 > \mu$ и $\lambda_1 > \lambda$. Доказать, что относительная погрешность в формуле (7.05) имеет порядок $O(x^{-\omega/\mu})$, где

$$\omega = \min(\lambda_1 - \lambda, \mu_1 - \mu).$$

7.6. Предположим, что функция $p'(t)$ непрерывна, а $p(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов в (a, b) . Используя метод доказательства § 3.2, показать, что условие 4) теоремы 7.1 из § 7.2 можно заменить следующим условием: $I(x)$ сходится по крайней мере при одном значении x .

§ 8. Асимптотические разложения на основе метода Лапласа; гамма-функция при больших значениях аргумента

8.1. Теорема 7.1 подтверждает предположение о том, что при достаточно общих предположениях асимптотическая форма интеграла (7.01) при больших x зависит только от поведения подынтегрального выражения вблизи точки минимума функции $p(t)$. Предыдущие рассуждения можно обобщить и получить полное асимптотическое разложение $I(x)$ по убывающим степеням x . Предположим, что функции $p(t)$ и $q(t)$ разлагаются в ряды по возрастающим степеням $t-a$ в окрестности точки a . Как и в случае леммы Ватсона, несущественно, сходящиеся это ряды или асимптотические; не обязательно такие, чтобы степени $t-a$ были целыми. Мы продемонстрируем метод на следующем примере.

Допустим, что

$$p(t) \sim p(a) + \sum_{s=0}^{\infty} p_s(t-a)^{s+\mu} \quad (8.01)$$

и

$$q(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} q_s(t-a)^{s+\lambda-1} \quad (8.02)$$

при $t \rightarrow a$ справа, где μ и λ — положительные постоянные¹⁾. Без потери общности можно предположить, что $p_0 \neq 0$ и $q_0 \neq 0$. Так как $t=a$ — точка минимума функции $p(t)$, постоянная p_0 положительна. Допустим также, что разложение (8.01) дифференцируемо, т. е.

$$p'(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (s+\mu) p_s(t-a)^{s+\mu-1} \quad (t \rightarrow a+0). \quad (8.03)$$

¹⁾ В действительности можно считать λ комплексным числом, удовлетворяющим условию $\operatorname{Re} \lambda > 0$; это не приведет к усложнениям.

Подставляя (8.01) в уравнение

$$v = p(t) - p(a)$$

и обращая его, как в главе 1, § 8.4, мы приходим к разложению вида

$$t - a \sim \sum_{s=1}^{\infty} c_s v^{s/\mu} \quad (v \rightarrow +0). \quad (8.04)$$

Можно проверить, что первые три коэффициента имеют следующие значения:

$$c_1 = \frac{1}{p_0^{1/\mu}}, \quad c_2 = -\frac{p_1}{\mu p_0^{1+(2/\mu)}}, \quad c_3 = \frac{(\mu+3)p_1^2 - 2\mu p_0 p_2}{2\mu^3 p_0^{2+(3/\mu)}}. \quad (8.05)$$

Подстановка этого результата в (8.02), (8.03) и использование равенства

$$f(v) = q(t) \frac{dt}{dv} = \frac{q(t)}{p'(t)} \quad (8.06)$$

(ср. (7.07)) дают

$$f(v) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s v^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (v \rightarrow +0), \quad (8.07)$$

где коэффициенты a_s выражаются через p_s и q_s . В частности,

$$a_0 = \frac{q_0}{\mu p_0^{\lambda/\mu}}, \quad a_1 = \left\{ \frac{q_1}{\mu} - \frac{(\lambda+1)p_1 q_0}{\mu^2 p_0} \right\} \frac{1}{p_0^{(\lambda+1)/\mu}}$$

и

$$a_2 = \left\{ \frac{q_2}{\mu} - \frac{(\lambda+2)p_1 q_1}{\mu^2 q_0} + [(\lambda+\mu+2)p_1^2 - 2\mu p_0 p_2] \frac{(\lambda+2)q_0}{2\mu^3 p_0^2} \right\} \frac{1}{p_0^{(\lambda+2)/\mu}}.$$

(В случае $q(t)=1$ имеем $\lambda=1$ и $a_s=(s+1)c_{s+1}/\mu$.)

8.2. Теорема 8.1¹⁾. Пусть выполняются условия (1), (2) и (4) из § 7.2 и справедливы разложения (8.01) — (8.03). Тогда

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt \sim e^{-xp(a)} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (x \rightarrow \infty), \quad (8.08)$$

где коэффициенты a_s определены в § 8.1.

¹⁾ Эрдейи (1962, § 2.4). Теорема 3.1 получается в частном случае при $a=0$, $b=\infty$, $p(t)=t^\mu$ и замене t^μ на t .

Это утверждение доказывается так же, как теорема 7.1. Мы снова предположим, что k — точка, расположенная справа от a достаточно близко к a , так что производная $p'(t)$ непрерывна и положительна, а функция $q(t)$ непрерывна в $(a, k]$, и положим $\kappa = p(k) - p(a)$.

Воспользуемся формулой (7.06). Для каждого положительного целого n коэффициент остаточного члена $f_n(v)$ определяется равенством $f_n(0) = a_n$ и

$$f(v) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s v^{(s+\lambda-\mu)/\mu} + v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v) \quad (v > 0). \quad (8.09)$$

В соответствии с (7.09) имеем

$$\int_0^{\kappa} e^{-xv} f(v) dv = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} - \varepsilon_{n,1}(x) + \varepsilon_{n,2}(x), \quad (8.10)$$

где

$$\varepsilon_{n,1}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}, \kappa x\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (8.11)$$

и

$$\varepsilon_{n,2}(x) = \int_0^{\kappa} e^{-xv} v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v) dv. \quad (8.12)$$

Из разложения (1.04) следует, что при больших x

$$\varepsilon_{n,1}(x) = O(e^{-\kappa x}/x).$$

Поскольку значение κ конечно, а $f_n(v)$ непрерывна в $[0, \kappa]$, то

$$\varepsilon_{n,2}(x) = \int_0^{\kappa} e^{-xv} v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} O(1) dv = O\left(\frac{1}{x^{(n+\lambda)/\mu}}\right).$$

Поэтому вклад области интегрирования (a, k) в $I(x)$ имеет указанное асимптотическое разложение. Для оставшейся области (k, b) снова справедлива оценка (7.13), и асимптотическое разложение не меняется. Доказательство закончено.

8.3. Важным примером является интеграл Эйлера

$$\Gamma(x) = x^{-1} \int_0^{\infty} e^{-w} w^x dw \quad (x > 0).$$

Подынтегральное выражение обращается в нуль при $w=0$, возрастает до максимального значения при $w=x$, затем монотонно убывает до нуля при $w \rightarrow \infty$. Положение максимума можно сде-

дать не зависящим от x , взяв w/x в качестве новой переменной интегрирования; но поскольку обозначения несколько упрощаются, если максимум находится в начале координат, мы положим $w = x(1+t)$. Тогда

$$\Gamma(x) = e^{-x} x^x \int_{-1}^{\infty} e^{-xt} (1+t)^x dt = e^{-x} x^x \int_{-1}^{\infty} e^{-xp(t)} dt, \quad (8.13)$$

где

$$p(t) = t - \ln(1+t).$$

Разбиение интервала интегрирования в точке минимума функции $p(t)$ дает

$$e^x x^{-x} \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-xp(t)} dt + \int_0^1 e^{-xp(-t)} dt. \quad (8.14)$$

Так как $p'(t) = t/(1+t)$ и

$$p(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{4} t^4 - \dots \quad (-1 < t < 1),$$

легко видеть, что условия теоремы 8.1 выполнены для обоих интегралов в (8.14). При $v = p(t)$ обращение последнего разложения дает для первого интеграла

$$t = 2^{1/2} v^{1/2} + \frac{2}{3} v + \frac{2^{1/2}}{18} v^{3/2} - \frac{2}{135} v^2 + \frac{2^{1/2}}{1080} v^{5/2} + \dots;$$

это разложение сходится при достаточно малых v . Отсюда

$$f(v) \equiv \frac{dt}{dv} = a_0 v^{-1/2} + a_1 + a_2 v^{1/2} + \dots, \quad (8.15)$$

где, например,

$$a_0 = 2^{1/2}/2, \quad a_1 = 2/3, \quad a_2 = 2^{1/2}/12, \quad a_3 = -4/135, \quad a_4 = 2^{1/2}/432.$$

Из (8.08) находим

$$\int_0^{\infty} e^{-xp(t)} dt \sim \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{a_s}{x^{(s+1)/2}}.$$

Аналогично,

$$\int_0^1 e^{-xp(-t)} dt \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{a_s}{x^{(s+1)/2}}.$$

Подстановка этих рядов в (8.14) приводит к искомому результату:

$$\Gamma(x) \sim e^{-x} x^x \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots\right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (8.16)$$

Главный член этого разложения известен под названием *формулы Стирлинга*. Общего выражения для коэффициентов не имеется¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Предположим, что производные $p'(t)$ и $p''(t)$ непрерывны в (a, b) , минимум функции $p(t)$ достигается во внутренней точке t_0 и $p(t)$ ограничена от $p(t_0)$ при $t \rightarrow a$ или b . Показать, что

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt = q(t_0) e^{-xp(t_0)} \left\{ \frac{2\pi}{xp''(t_0)} \right\}^{1/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \quad (x \rightarrow \infty)$$

при условии, что $p''(t_0)$ и $p(t_0)$ отличны от нуля и интеграл сходится абсолютно при достаточно больших значениях x .

8.2. Используя предыдущее упражнение, доказать, что относительная ошибка в (7.15) имеет порядок $O(e^{-x})$.

8.3. Показать, что коэффициент a_s из § 8.3 удовлетворяет соотношению

$$a_0 a_s + \frac{1}{2} a_1 a_{s-1} + \frac{1}{3} a_2 a_{s-2} + \dots + \frac{1}{s+1} a_s a_0 = \frac{1}{s} a_{s-1} \quad (s \geq 1).$$

8.4. Показать, что

$$\int_0^{\pi^{1/4}} e^{x \cos \sqrt{t}} dt \sim e^x \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{8}{15x^5} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Останется ли этот результат верным, если заменить пределы интегрирования на а) 0 и π^2 , б) 0 и $4\pi^2$?

8.5. В обозначениях § 7.4 показать, что

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2s-1)^2}{s! (8x)^s} \quad (x \rightarrow \infty).$$

8.6. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} dv \sim \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\text{Rg}^{(s+1)}(0)}{(\ln t)^{s+2}} \quad (t \rightarrow +0),$$

где $\text{Rg}(v) = 1/\Gamma(v)$.

8.7. Используя формулу Стирлинга, показать, что при фиксированном отрицательном α

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} dv \sim e^t \quad (t \rightarrow \infty).$$

¹⁾ Двадцать один коэффициент, а также приближенные значения следующих десяти были получены Ренчем (1968).

§ 9*. Оценки остаточных членов для леммы Ватсона и метода Лапласа

9.1. В случае теоремы 3.1 естественным путем обобщения анализа остаточных членов является введение такого числа σ_n , что функция $\varphi_n(t)$, определенная равенством (3.04), имеет оценку

$$|\varphi_n(t)| \leq |a_n| t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} e^{\sigma_n t} \quad (0 < t < \infty). \quad (9.01)$$

Остаточный член в (3.05) удовлетворяет тогда оценке

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} \varphi_n(t) dt \right| \leq \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{|a_n|}{(x - \sigma_n)^{(n+\lambda)/\mu}} \\ (x > \max(\sigma_n, 0))^1). \quad (9.02)$$

Наилучшее значение σ_n дается формулой

$$\sigma_n = \sup_{(0, \infty)} \{\psi_n(t)\}, \quad (9.03)$$

$$\psi_n(t) = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\varphi_n(t)}{a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu}} \right| = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{q(t) - \sum_{s=0}^{n-1} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}}{a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu}} \right|.$$

Как и в (2.09), оценка (9.02) асимптотически приближается к точному значению абсолютной величины остатка при $x \rightarrow \infty$.

Если значение σ_n бесконечно, то указанный подход невозможен. Это, очевидно, имеет место, когда $a_n = 0$; в этом случае мы просто переходим к большему значению n .

Пусть $a_n \neq 0$; наиболее общий случай, когда значение σ_n бесконечно, имеет место, если функция $\psi_n(t)$ стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow +0$. Из (3.02) получаем для малых t

$$\varphi_n(t) \sim a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} + a_{n+1} t^{(n+1+\lambda-\mu)/\mu} + a_{n+2} t^{(n+2+\lambda-\mu)/\mu} + \dots$$

Поэтому

$$\psi_n(t) \sim \frac{a_{n+1}}{a_n} t^{(1/\mu)-1} + \left(\frac{a_{n+2}}{a_n} - \frac{a_{n+1}^2}{2a_n^2} \right) t^{(2/\mu)-1} + \dots$$

Если $\mu > 1$, то $t^{(1/\mu)-1} \rightarrow \infty$. Если a_{n+1} и a_n имеют противоположные знаки, то вопроса не возникает, поскольку правая часть стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow 0$. Но если $\mu > 1$ и $a_{n+1}/a_n > 0$, то $\sigma_n = \infty$.

9.2. Простой способ преодоления этой трудности состоит в видоизменении оценки (9.01) путем введения произвольного множителя M , превосходящего единицу; во многих случаях подходя-

¹⁾ Условие $x > 0$ необходимо для справедливости формулы (3.05).

щим является значение $M=2$. Тогда вместо (9.02) получаем

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} \varphi_n(t) dt \right| \leq \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{M |a_n|}{(x - \hat{\sigma}_n)^{(n+\lambda)/\mu}} \quad (x > \max(\hat{\sigma}_n, 0)), \quad (9.04)$$

где

$$\hat{\sigma}_n = \sup_{(0, \infty)} \left\{ \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\varphi_n(t)}{M a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu}} \right| \right\}. \quad (9.05)$$

Эта оценка, как правило, имеет место, поскольку при $t \rightarrow 0$ выражение в скобках в последнем равенстве стремится к $-\infty$.

В частности, можно взять $M = M_n$, где

$$M_n = \sup_{(0, \infty)} |\varphi_n(t) / \{a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu}\}|.$$

Тогда $\hat{\sigma}_n = 0$, откуда следует, что отношение правой части (9.04) к абсолютной величине первого отбрасываемого члена асимптотического разложения равно M_n и не зависит от x . На практике, однако, M_n может оказаться бесконечным или слишком большим.

9.3. Другой подход заключается в следующем. Пусть m — наибольшее целое число, для которого $m < \mu$, и a_{n+j+1} — первый из элементов множества $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m}$, имеющий знак, противоположный знаку a_n , или, если такое число не существует, полагаем $j=m$. Пусть

$$\rho_n = \sup_{(0, \infty)} \left\{ \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\varphi_n(t) t^{-(n+\lambda-\mu)/\mu}}{a_n + a_{n+1} t^{1/\mu} + \dots + a_{n+j} t^{j/\mu}} \right| \right\}. \quad (9.06)$$

Тогда

$$|\varphi_n(t)| \leq |a_n t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} + a_{n+1} t^{(n+1+\lambda-\mu)/\mu} + \dots + a_{n+j} t^{(n+j+\lambda-\mu)/\mu}| e^{\rho_n t},$$

и

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} \varphi_n(t) dt \right| \leq \sum_{s=n}^{n+j} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{|a_s|}{(x - \rho_n)^{(s+\lambda)/\mu}}. \quad (9.07)$$

Эта оценка приведет к желаемому результату, так как при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\varphi_n(t) t^{-(n+\lambda-\mu)/\mu}}{a_n + a_{n+1} t^{1/\mu} + \dots + a_{n+j} t^{j/\mu}} \right| &= \\ &= \frac{a_{n+j+1}}{a_n} t^{(j+1-\mu)/\mu} + O(t^{(j+2-\mu)/\mu}), \end{aligned}$$

и последнее выражение стремится к $-\infty$, если $j \leq m-1$, или

ограничено, если $j=m$. Кроме того, $a_n + a_{n+1}t^{1/\mu} + \dots + a_{n+j}t^{j/\mu}$ не может обращаться в нуль при $t \in (0, \infty)$.

Преимущество оценки (9.07) заключается в том, что отношение правой части к абсолютной величине фактического остатка стремится к единице при $x \rightarrow \infty$, в отличие от (9.04). Недостаток состоит в возрастании сложности оценки и необходимости вычислять коэффициенты, следующие за a_n .

9.4. В случае теоремы 8.1 из доказательства легко вывести, что n -й остаточный член разложения (8.08) можно записать в виде

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt - e^{-xp(a)} \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} =$$

$$= -e^{-xp(a)} \varepsilon_{n,1}(x) + e^{-xp(a)} \varepsilon_{n,2}(x) + \int_k^b e^{-xp(t)} q(t) dt, \quad (9.08)$$

где k — число из $(a, b]$, удовлетворяющее условиям § 8.2, а $\varepsilon_{n,1}(x)$ и $\varepsilon_{n,2}(x)$ определены формулами (7.07), (8.09), (8.11) и (8.12) при $v = p(t) - p(a)$.

Первый остаточный член в (9.08) отсутствует, если $k = b$ и $p(b) = \infty$, поскольку тогда $\kappa = \infty^1$.

В других случаях из (1.05) и (2.14) выводим оценку

$$\Gamma(\alpha, x) \leq \frac{e^{-x} x^\alpha}{x - \max(\alpha - 1, 0)} \quad (x > \max(\alpha - 1, 0)).$$

Используя это неравенство, получаем из (8.11)

$$|e^{-xp(a)} \varepsilon_{n,1}(x)| \leq \frac{e^{-xp(k)}}{\kappa x - \alpha_n} \sum_{s=0}^{n-1} |a_s| \kappa^{(s+\lambda)/\mu} \quad \left(x > \frac{\alpha_n}{\kappa}\right), \quad (9.09)$$

где, как и раньше, $\kappa = p(k) - p(a)$ и

$$\alpha_n = \max\{(n+\lambda-\mu-1)/\mu, 0\}. \quad (9.10)$$

Второй остаточный член $e^{-xp(a)} \varepsilon_{n,2}(x)$ можно оценить методами, аналогичными изложенным в §§ 9.1—9.3. Роль t теперь играет переменная v , а $\varphi_n(t)$ замещается на $v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v)$; существенное отличие состоит в том, что верхняя граница в (9.03), (9.05) и (9.06) вычисляется в интервале $0 < v < \kappa$ вместо $0 < t < \infty$. Оценки (9.02), (9.04) и (9.07) остаются справедливыми для $|\varepsilon_{n,2}(x)|$.

Для последнего слагаемого в (9.08) можно использовать неравенство (7.13), причем интеграл в правой части вычисляется для

¹⁾ Условие в доказательстве теоремы 8.1 относительно конечности k и κ не налагается в случае (9.08).

подходящего значения X . Или же, как ниже, в § 10.1, иногда оказывается возможным промажорировать $-p(t)$ и $|q(t)|$ простыми функциями и аналитически вычислить полученный интеграл. Поскольку вклад интеграла экспоненциально мал по сравнению с $e^{-xp(a)}\varepsilon_{n,2}(x)$, часто приемлема грубая оценка.

9.5. Некоторые сложности при оценке $|\varepsilon_{n,2}(x)|$ могут возникнуть в следующем общем случае. Предположим, что функции $p(t)$ и $q(t)$ разлагаются в ряд Тейлора во всех точках интервала (a, b) ; $p(t)$ имеет простой минимум во внутренней точке (a, b) , а $q(t)$ не обращается в нуль в этой точке. Без потери общности мы можем предположить, что: 1) минимум находится в точке $t=0$, 2) $p(0)=p'(0)=0$, 3) область интегрирования такова, что функция $p'(t)/t$ положительна в интервале $a < t < b$ и $p(a) = p(b) = \infty$.

Как и раньше, в области $(0, b)$ мы вводим новую переменную интегрирования $v = p(t)$. Тогда

$$\int_0^b e^{-xp(t)} q(t) dt = \int_0^\infty e^{-xv} f(v) dv,$$

где

$$f(v) = \frac{q(t)}{p'(t)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s v^{(s-1)/2};$$

это разложение сходится для всех достаточно малых v ; сравните (8.07) при $\mu = 2$ и $\lambda = 1$.

Аналогично,

$$\int_a^0 e^{-xp(t)} q(t) dt = \int_0^\infty e^{-xv} \hat{f}(v) dv,$$

где

$$\hat{f}(v) = -\frac{q(t)}{p'(t)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s v^{(s-1)/2}.$$

Следовательно,

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt = \int_0^\infty e^{-xv} F(v) dv,$$

где для малых v

$$F(v) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} v^{s-1/2}.$$

Так как последнее разложение производится по степеням v , а не $v^{1/2}$, оценка вида (9.02) для остатка может быть построена с конечным значением показателя σ_n .

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Показать, что при $x > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-x \cosh t} dt = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} e^{-x} \{1 - \theta(x)\},$$

где $0 < \theta(x) < (8x)^{-1}$.

9.2. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-xt^2) \ln(1+t+t^2) dt = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left\{ \frac{1}{x^{3/2}} + \frac{3}{4x^{5/2}} - \frac{5}{2x^{7/2}} + \varepsilon(x) \right\},$$

где

$$0 < \varepsilon(x) < \frac{105}{32(x-4/5)^{9/2}} \quad (x > 4/5) \quad (\text{Олвер, 1968}).$$

9.3. В предположении, что каждый из интегралов (моментов)

$$M_s = \int_0^{\infty} t^s f(t) dt \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

конечен, доказать, что при больших положительных значениях x асимптотическое разложение преобразования Стильтьеса

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t+x} dt$$

имеет вид

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s M_s x^{-s-1} + \varepsilon_n(x),$$

где n — произвольное положительное целое число или нуль и

$$|\varepsilon_n(x)| \leq x^{-n-1} \sup_{(0, \infty)} \left| \int_0^t v^n f(v) dv \right|.$$

§ 10*. Примеры

10.1. Рассмотрим асимптотическое разложение, приведенное в упр. 8.5 для функции

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos t} dt.$$

В обозначениях § 9.4 функция $p(t) \equiv -\cos t$ монотонно возрастает от минимума при $t = 0$ до максимума при $t = \pi$. Однако мы не можем взять $k = \pi$, поскольку $p'(t)$ обращается в нуль в этой точке. «Наилучшее» значение для k точно определить нелегко,

но такой выбор не является необходимым. Предположим, для простоты, что k — это средняя точка $\pi/2$.

Когда $\pi/2 \leq t \leq \pi$, из неравенства Жордана вытекает, что $\cos t \leq 1 - (2t/\pi)$. В соответствии с этим оценка остатка для интеграла имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{x \cos t} dt \leq \frac{e^x}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-2tx/\pi} dt < \frac{1}{2x}. \quad (10.01)$$

Далее, в обозначениях §§ 7 и 8 имеем $a=0$, $p_0=1/2$, $\mu=2$, $\lambda=1$, $\kappa=1$, $v=1-\cos t=2\sin^2(t/2)$ и

$$f(v) = \frac{1}{\pi \sin t} = \frac{1}{\pi (2v - v^2)^{1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s v^{(s-1)/2} \quad (0 < v < 2),$$

где

$$a_{2s} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{\pi 2^{2s+1/2} s!}, \quad a_{2s+1} = 0.$$

Поскольку все a_s с четными индексами равны нулю, мы применим результаты § 9, заменив n на $2n$. Из (9.10) получаем $a_{2n} = n-1$ ($n \geq 1$). Поэтому в силу (9.09)

$$|\varepsilon_{2n,1}(x)| \leq \frac{e^{-x}}{x-n+1} \sum_{s=0}^{2n-1} a_s < \frac{e^{-x}}{(x-n+1)\pi} \quad (x > n-1 \geq 0). \quad (10.02)$$

Далее,

$$f_{2n}(v) = \frac{1}{v^{n-(1/2)}} \left\{ \frac{1}{\pi (2v-v^2)^{1/2}} - \sum_{s=0}^{n-1} a_{2s} v^{s-(1/2)} \right\} = a_{2n} + a_{2n+2}v + a_{2n+4}v^2 + \dots \quad (0 \leq v < 2).$$

Так как в этом разложении нет члена с $v^{1/2}$, то методы §§ 9.1 и 9.3 приводят к той же самой оценке для $\varepsilon_{2n,2}(x)$:

$$|\varepsilon_{2n,2}(x)| < \frac{\Gamma(n+(1/2)) a_{2n}}{(x-\sigma_{2n})^{n+(1/2)}} \quad (x > \sigma_{2n}), \quad (10.03)$$

где

$$\sigma_{2n} = \sup_{(0,1)} \left\{ \frac{1}{v} \ln \left| \frac{f_{2n}(v)}{a_{2n}} \right| \right\}. \quad (10.04)$$

Объединение неравенств (10.01)–(10.03) приводит к искомой оценке для остаточных членов в разложении

$$I_0(x) = e^x \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma(s+(1/2)) a_{2s}}{x^{s+(1/2)}} - \varepsilon_{2n,1}(x) + \varepsilon_{2n,2}(x) \right\} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{x \cos t} dt.$$

Значения σ_{2n} можно вычислить по формуле (10.04). Первые три из них имеют вид

$$\sigma_0 = 0,35; \quad \sigma_2 = 0,50; \quad \sigma_4 = 0,56$$

с точностью до двух десятичных знаков¹⁾.

Другой путь вывода асимптотического разложения для $I_0(x)$ вместе с оценками остаточного члена дан в главе 7, главным образом в § 8.2 и упр. 13.2.

10.2²⁾). В качестве второго примера рассмотрим

$$S(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^m dt, \quad (10.05)$$

где m — положительное целое число. Методы контурного интегрирования дают конечную сумму

$$S(m) = \frac{m}{2^{m-1}} \sum_{s=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^s (m-2s)^{m-1}}{s! (m-s)!}, \quad (10.06)$$

но вычисление этой суммы для больших значений m громоздко, и поэтому мы попытаемся найти асимптотическое разложение.

Функция $\sin t/t$ имеет бесконечное число максимумов и минимумов, расположенных в точках, являющихся последовательными неотрицательными корнями 0, t_1 , t_2 , t_3 , ... уравнения

$$\operatorname{tg} t = t.$$

Только один корень $t = 0$ лежит в $[0, \pi]$, и для этого интервала мы введем новую переменную интегрирования τ :

$$\tau = \ln \left(\frac{t}{\sin t} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{t \sin t}{\sin t - t \cos t}.$$

Когда t возрастает от 0 до π , переменная τ монотонно возрастает от 0 до ∞ . Поэтому

$$S_0(m) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^m dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-m\tau} \frac{dt}{d\tau} d\tau. \quad (10.07)$$

Для малых t и τ с помощью разложения и обращения мы найдем, что

$$t = (6\tau)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{10} \tau - \frac{13}{4200} \tau^2 + \frac{9}{14000} \tau^3 + \dots \right).$$

¹⁾ Аналитические методы нахождения верхней грани в выражении (9.03) для показателя σ_n были разработаны Олвером (1968). В данном примере этими методами можно установить, что верхняя грань в (10.04) достигается при $\nu = 1$. Следовательно, вычисление σ_{2n} сводится к вычислению $\ln\{(\pi^{-1} - a_0 - a_2 - \dots - a_{2n-2})/a_{2n}\}$.

²⁾ Рассуждения в §§ 10.2 и 10.3 основаны на работе Меджерста и Робертса (1965).

Применение леммы Ватсона приводит тогда к разложению

$$S_0(m) \sim \left(\frac{6}{\pi m}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h_s}{m^s} \quad (m \rightarrow \infty), \quad (10.08)$$

где $h_0=1$, $h_1=-3/20$, $h_2=-13/1120$, $h_3=27/3200$, ...

Рассмотрим теперь интервал $[s\pi, (s+1)\pi]$, где s — любое положительное целое число. Имеем

$$s\pi < t_1 < (s + 1/2)\pi.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{s\pi}^{(s+1)\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt \right| \leq 2 \left| \frac{\sin t_s}{t_s} \right|^m = \frac{2}{(1-t_s^2)^{m-1}} < \frac{2}{(s\pi)^{2m}}.$$

Суммирование дает

$$\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt \leq \frac{2}{\pi^m} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{2m}} \quad (m \geq 2).$$

Так как правая часть имеет порядок $O(\pi^{-m})$ при больших m , искомое разложение сводится к

$$S(m) \sim \left(\frac{6}{\pi m}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h_s}{m^s} \quad (m \rightarrow \infty). \quad (10.09)$$

10.3. Численные результаты, полученные из последнего разложения, оказываются несколько разочаровывающими. Например, при $m=4$ четвертая частичная сумма дает

$$0,6910(1 - 0,0375 - 0,0007 + 0,0001) = 0,6647 \quad (10.10)$$

с точностью до 4 десятичных знаков, а точное значение, вычисленное по формуле (10.06), равно $S(4) = 2/3$. Таким образом, абсолютная ошибка приблизительно в 20 или 30 раз больше последнего оставленного члена.

Гладкость функции dt/dt в (10.07) говорит о том, что расхождение возникает не из-за остатка, связанного с разложением (10.00). Более вероятным источником является пренебрежение вкладом от оставшейся части области интегрирования, особенно если учесть, что подынтегральная функция $(\sin t/t)^m$ в (10.05) равна 0,0022 при $m=4$ и $t=t_1=4,4934$, ...

Рассмотрим интервал $[\pi, 2\pi]$. Применение методов §§ 4 и 5 дает

$$S_1(m) \equiv \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt \sim 2(\cos t_1)^m \left(\frac{2}{\pi m}\right)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h_s}{m^s} \quad (m \rightarrow \infty), \quad (10.11)$$

где ¹⁾

$$k_0 = 1, \quad k_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6t_1^2} = -0,2583, \dots$$

При $m=4$ это разложение имеет вид

$$0,0018(1-0,0646+\dots)=0,0017.$$

Прибавляя этот результат к (10.10), мы получим 0,6664, что значительно ближе к точному значению. Еще более точный результат можно было бы получить, учитывая приближенный вклад $2(\cos t_2)^m \{2/(\pi m)\}^{1/2}$ от интервала $[2\pi, 3\pi]$. Таким образом, этот пример также иллюстрирует важность учета экспоненциально малых членов в асимптотическом разложении.

10.4. Выводы предыдущего пункта можно подтвердить строгим анализом остатков согласно § 9. Полная форма разложения (10.08) имеет вид

$$S_0(m) = \left(\frac{6}{\pi m}\right)^{1/2} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{h_s}{m^s} + \varepsilon_n(m) \right\} \quad (n=1, 2, \dots),$$

где

$$|\varepsilon_n(m)| \leq \frac{|h_n| m^{1/2}}{(m - \rho_n)^{n+(1/2)}} \quad (m > \rho_n)$$

и

$$\rho_n = \sup_{t \in (0, \pi)} \left[\frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{1}{l_n \tau^{s-(1/2)}} \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{dt}{d\tau} - \sum_{s=0}^{n-1} l_s \tau^{s-(1/2)} \right\} \right| \right]$$

при $l_s = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) h_s / \Gamma(s+(1/2))$. Численный подсчет дает $\rho_3 = 0,45 \dots$. Следовательно, значение $S_0(4)$, полученное при суммировании первых трех членов в (10.08), а именно 0,6646..., верно с точностью до $\pm 0,00014$.

Аналогичный результат для (10.11) имеет вид

$$S_1(m) = 2(\cos t_1)^m \left(\frac{2}{\pi m}\right)^{1/2} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{k_s}{m^s} + \eta_n(m) \right\},$$

где

$$|\eta_n(m)| \leq \frac{2|k_n| m^{1/2}}{(m - \hat{\sigma}_n)^{n+(1/2)}} \quad (m > \hat{\sigma}_n),$$

причем число $\hat{\sigma}_n$ определено формулой (9.05) при $M=2$. Прямым

¹⁾ В указанной выше работе Меджерста и Робертса (1965) значение k_1 было вычислено неточно.

вычислением мы можем установить, что \hat{S}_1 равно нулю с точностью до двух десятичных знаков. Отсюда следует, что значение $S_1(4)$ равно $2(\cos t_1)^4(2\pi)^{-1/2}$, т. е. 0,0018..., и этот результат верен с точностью до $\pm 0,00023$.

§ 11. Метод стационарной фазы

11.1. Рассмотрим интегралы

$$\int_a^b \cos \{xp(t)\} q(t) dt, \quad \int_a^b \sin \{xp(t)\} q(t) dt,$$

в которых a , b , $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от параметра x . При больших x подынтегральные выражения быстро осциллируют, и колебания компенсируют друг друга в большей части области интегрирования. Однако такой компенсации не происходит в окрестностях следующих точек: 1) конечных точек a и b (если они конечны) вследствие отсутствия симметрии; 2) нулей $p'(t)$, поскольку $p(t)$ относительно медленно меняется около этих «стационарных точек». Метод стационарной фазы¹⁾ Кельвина берет свое начало в этих несколько туманных соображениях.

Оба интеграла можно рассмотреть одновременно, объединяя их в интеграл

$$I(x) = \int_a^b e^{ixp(t)} q(t) dt. \quad (11.01)$$

В окрестности точки $t=a$ новое подынтегральное выражение приближенно равно

$$\exp [ix \{p(a) + (t-a)p'(a)\}] q(a).$$

Неопределенный интеграл от этой функции имеет вид

$$\frac{\exp [ix \{p(a) + (t-a)p'(a)\}] q(a)}{ixp'(a)}, \quad (11.02)$$

при условии, что $p'(a) \neq 0$. Нижний предел $t=a$ дает в $I(x)$ вклад

$$-e^{ixp(a)} q(a) / \{ixp'(a)\}. \quad (11.03)$$

Когда t удаляется от a , действительная и мнимая части (11.02) осциллируют около нуля, и поэтому есть основания пренебречь остальным вкладом от (11.02). Аналогичные рассуждения указывают, что верхний предел $t=b$ даст асимптотически вклад

$$e^{ixp(b)} q(b) / \{ixp'(b)\}. \quad (11.04)$$

¹⁾ Называемый также методом критических точек.

11.2. Далее, если $t_0 \in (a, b)$ — стационарная точка функции $p(t)$, то около этой точки подынтегральное выражение приближенно равно

$$\exp \left[ix \left\{ p(t_0) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 p''(t_0) \right\} \right] q(t_0)$$

при условии, что $p''(t_0)$ и $q(t_0)$ не равны нулю. Интегрируя эту функцию, мы следуем предположению, что лишь окрестность точки t_0 имеет значение, и расширяем пределы интегрирования до $-\infty$ и $+\infty$. Получившийся интеграл вычисляется в явном виде. Имеем ¹⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm iyt^2) dt = e^{\pm \pi i/4} \left(\frac{\pi}{y} \right)^{1/2} \quad (y > 0).$$

Следовательно, можно ожидать, что вклад в $I(x)$ от окрестности точки t_0 равен

$$e^{\pm \pi i/4} q(t_0) \exp \{ ix p(t_0) \} \left| \frac{2\pi}{xp''(t_0)} \right|^{1/2}, \quad (11.05)$$

где верхний или нижний предел выбираются соответственно при положительном или отрицательном знаке выражения $x p''(t_0)$. Следует, между прочим, отметить, что (11.05) имеет более высокий порядок величины, чем (11.03) и (11.04).

Аналогичные результаты можно установить ¹⁾ для стационарных точек более высокого порядка, т. е. точек, в которых первые из обращающихся в нуль последовательных производных функции $p(t)$ имеют порядок, больший 2; 2) в некоторых случаях, когда $q(t_0) = 0$.

Приближенное значение $I(x)$ при больших x можно получить, суммируя выражения вида (11.05) по различным стационарным точкам, принадлежащим области интегрирования, и добавляя вклады (11.03) и (11.04) от концевых точек. Этот подход является, конечно, эвристическим, но в последующих пунктах мы дадим этому методу строгое обоснование.

Обращает на себя внимание сходство приближений (11.03) и (11.05) с (7.02) и (7.03). С точки зрения теории функций комплексной переменной (глава 4) метод Лапласа и метод стационарной фазы можно рассматривать как частные случаи одного общего метода. Этот факт находит отражение и в рассуждениях: доказательства, приведенные ниже в § 13, во многом сходны с доказательствами в § 7.

11.3. Случай, когда стационарные точки отсутствуют, сводится к упражнению в интегрировании по частям. Поскольку $p'(t)$,

¹⁾ Ср. ниже § 12.1.

не меняет знака в $[a, b]$, мы можем взять $v=p(t)$ в качестве новой переменной интегрирования. Тогда (11.01) принимает вид

$$I(x) = \int_{p(a)}^{p(b)} e^{ixv} f(v) dv,$$

где $f(v) = q(t)/p'(t)$. Это — интеграл Фурье, и к нему можно применить асимптотические методы § 5. В частности, если функция $f(v)$ непрерывна, а $f'(v)$ кусочно-непрерывна, т. е. если $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны, а $p''(t)$ и $q'(t)$ кусочно-непрерывны в $[a, b]$, то

$$I(x) = \frac{te^{ixp(a)}q(a)}{xp'(a)} - \frac{te^{ixp(b)}q(b)}{xp'(b)} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Этим в данном случае подтверждаются предсказания § 11.1.

В других случаях область интегрирования можно разбить на части таким образом, что единственная стационарная точка в каждой подобласти расположена в одной из концевых точек; без потери общности мы можем предположить, что эти точки являются левыми. Перед тем как перейти к указанным случаям, мы установим ряд предварительных результатов.

§ 12. Предварительные леммы

12.1. Лемма 12.1. Справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} e^{ixv} v^{\alpha-1} dv = \frac{e^{\alpha\pi i/2} \Gamma(\alpha)}{x^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1, x > 0). \quad (12.01)$$

Ограничение $\alpha \in (0, 1)$ необходимо, так как интеграл расходится на нижнем пределе при $\alpha \leq 0$ и на верхнем пределе при $\alpha \geq 1$.

Этот результат можно доказать, интегрируя функцию $e^{ixv} v^{\alpha-1}$ вдоль контура, изображенного на рис. 12.1, и полагая затем $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. Детали доказательства несложны и предоставляются читателю.

12.2. Лемма 12.2. Если α и κ — фиксированные числа, такие, что $\alpha < 1$ и $\kappa > 0$, то

$$\int_{\kappa}^{\infty} e^{ixv} v^{\alpha-1} dv = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (12.02)$$

Этот результат также легко доказывается интегрированием по

частям:

$$\left| \int_x^\infty e^{ixv} v^{\alpha-1} dv \right| = \left| \left[\frac{e^{ixv}}{ix} v^{\alpha-1} \right]_x^\infty - \frac{\alpha-1}{ix} \int_x^\infty e^{ixv} v^{\alpha-2} dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^{\alpha-1}}{x} + \frac{1-\alpha}{x} \int_x^\infty v^{\alpha-2} dv = \frac{2x^{\alpha-1}}{x}.$$

12.3. Лемма 12.3. *Предположим, что в интеграле*

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{ixv} \varphi(v) dv \quad (12.03)$$

1) функция $\varphi(v)$ кусочно-непрерывна, а $\varphi'(v)$ имеет в интервале $(0, \infty)$ самое большее конечное число разрывов и точек, в которых она обращается в бесконечность;

2) $\varphi(v) = o(v^{\alpha-1})$ и $\varphi'(v) = o(v^{\alpha-2})$ при $v \rightarrow +0$, где α — постоянная из интервала $(0, 1)$;

3) вариация $\mathcal{V}_{x, \infty}(\varphi)$ конечна при любой положительной постоянной x ;

4) $\varphi(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$.

Тогда интеграл (12.03) равномерно сходится при $x \geqslant X$, где X — любая положительная постоянная, и

Рис. 12.1. v -плоскость.

$$\Phi(x) = o(x^{-\alpha}) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (12.04)$$

Это утверждение является обобщением леммы Римана — Лебега. Условие 2) показывает, что данный интеграл сходится на нижнем пределе абсолютно и равномерно для всех действительных x . Далее, если v_1 и v_2 — два любых числа, превосходящих абсциссы всех разрывов и точек с бесконечными значениями $\varphi(v)$ и $\varphi'(v)$, то в силу интегрирования по частям

$$\left| \int_{v_1}^{v_2} e^{ixv} \varphi(v) dv \right| = \left| \frac{\exp(ixv_2) \varphi(v_2) - \exp(ixv_1) \varphi(v_1)}{ix} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{ix} \int_{v_1}^{v_2} e^{ixv} \varphi'(v) dv \right| \leqslant x^{-1} \{ |\varphi(v_2)| + |\varphi(v_1)| + \mathcal{V}_{v_1, v_2}(\varphi) \}.$$

Из этого неравенства и условий 3), 4) следует, что интеграл (12.03) сходится равномерно на верхнем пределе при $x \geqslant X$.

Остается установить формулу (12.04). Пусть дано произвольное положительное число ε ; условия 1) и 2) показывают, что су-

существует конечное положительное число x , такое, что в $(0, x]$ функции $\varphi(v)$ и $\varphi'(v)$ непрерывны и

$$|\varphi(v)| \leq \varepsilon v^{\alpha-1}, \quad |\varphi'(v)| < \varepsilon v^{\alpha-2}. \quad (12.05)$$

Предположим, что $x \geq 1/x$ и разобьем область интегрирования в точке $v = 1/x$. Тогда

$$\left| \int_0^{1/x} e^{ixv} \varphi(v) dv \right| < \int_0^{1/x} \varepsilon v^{\alpha-1} dv = \frac{\varepsilon}{\alpha x^\alpha}.$$

Используя условие 4), мы находим с помощью интегрирования по частям, что

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^{\infty} e^{ixv} \varphi(v) dv &= \sum_{s=1}^m \frac{\exp(ixd_s)}{ix} \{ \varphi(d_s - 0) - \varphi(d_s + 0) \} - \\ &- \frac{e^j}{ix} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{ix} \int_{1/x}^x e^{ixv} \varphi'(v) dv - \frac{1}{ix} \int_x^{\infty} e^{ixv} \varphi'(v) dv, \end{aligned} \quad (12.06)$$

где d_1, d_2, \dots, d_m — точки разрыва функции $\varphi(v)$. При больших x сумма имеет порядок $O(x^{-1})$. Неравенства (12.05) показывают, что следующий член в правой части ограничен по абсолютному значению величиной $\varepsilon x^{-\alpha}$, а также что

$$\left| \frac{1}{ix} \int_{1/x}^x e^{ixv} \varphi'(v) dv \right| < \frac{1}{x} \int_{1/x}^x \varepsilon v^{\alpha-2} dv < \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)x^\alpha}.$$

Наконец, из неравенства (11.03) главы 1 следует, что

$$\left| \frac{1}{ix} \int_x^{\infty} e^{ixv} \varphi'(v) dv \right| \leq \frac{\mathcal{P}_{x,\infty}(\varphi)}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Доказательство леммы 12.3 завершается объединением полученных результатов.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Показать, что

$$\int_x^{\infty} e^{ixv} v^{\alpha-1} dv = e^{i\pi/2} x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, -ix) \quad (\alpha < 1)$$

и

$$\int_0^x e^{ixv} v^{\alpha-1} dv = e^{i\pi/2} x^{-\alpha} \gamma(\alpha, -ix) \quad (\alpha > 0),$$

где неполные гамма-функции принимают главные значения.

12.2. Показать, что лемма 12.3 остается справедливой, если всюду заменить символы o на O .

§ 13. Асимптотическая природа метода стационарной фазы

13.1. Предположим, как и в § 7.2, что в интеграле

$$I(x) = \int_a^b e^{ixp(t)} q(t) dt \quad (13.01)$$

пределы a и b не зависят от x , причем значение a конечно, а $b(>a)$ конечно или бесконечно. Функции $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от x , $p(t)$ — действительная, а $q(t)$ — действительная или комплексная функции. Так же, как и в конце § 11.3, мы предположим, что в замыкании интервала (a, b) единственной точкой, в которой $p'(t)$ обращается в нуль, является точка a . Без потери общности можно взять x и $p'(t)$ положительными; случаи, когда эти величины отрицательны, можно свести к данному изменением знака перед i в соответствующих местах. Мы будем использовать обозначение $p(b) \equiv \lim \{p(t)\}$ при $t \rightarrow b-0$, когда этот предел существует; в остальных случаях $p(b) = \infty$. В соответствии с условиями 1)–4) из § 7.2 предположим, что

1) в интервале (a, b) функции $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны, $p'(t) > 0$, а $p''(t)$ и $q'(t)$ имеют самое большое конечное число разрывов и точек, в которых они обращаются в нуль;

2) при $t \rightarrow a+0$

$$p(t) - p(a) \sim P(t-a)^\mu, \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}, \quad (13.02)$$

причем первое из этих соотношений дифференцируемо. Здесь P , μ и λ — положительные постоянные, а Q — действительная или комплексная постоянная;

3) вариация $\mathcal{V}_k \{q(t)/p'(t)\}$ конечна при любом $k \in (a, b)$;

4) при $t \rightarrow b-0$ величина $q(t)/p'(t)$ стремится к конечному пределу, и этот предел равен нулю, если $p(b) = \infty$.

Из условия 2) непосредственно следует, что интеграл (13.01) сходится на нижнем пределе абсолютно и равномерно для всех действительных x . Далее, в силу интегрирования по частям

$$\int e^{ixp(t)} q(t) dt = \frac{e^{ixp(t)}}{ix} \frac{q(t)}{p'(t)} - \frac{1}{ix} \int e^{ixp(t)} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{q(t)}{p'(t)} \right\} dt. \quad (13.03)$$

Используя условие 3) и 4), мы видим, что интеграл (13.01) сходится на верхнем пределе; кроме того, в случае $p(b) = \infty$ сходимость равномерна для всех достаточно больших x .

При сформулированных выше условиях природа асимптотического приближения для $I(x)$ при больших x зависит от знака разности $\lambda - \mu$. Когда $\lambda < \mu$, доминирует вклад от концевой точки a ; когда $\lambda > \mu$, доминирует вклад от b ; если же $\lambda = \mu$, то вклады

от a и b равноценны. Наиболее частым случаем в приложениях является $\lambda < \mu$; с него мы и начнем.

13.2. Теорема 13.1. *Предположим, в дополнение к условиям § 13.1, что $\lambda < \mu$, первое из соотношений (13.02) дважды дифференцируемо, а второе — дифференцируемо¹⁾. Тогда*

$$I(x) \sim e^{\lambda \pi i / (2\mu)} \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{e^{ixp(a)}}{(Px)^{\lambda/\mu}} \quad (x \rightarrow \infty). \quad (13.04)$$

Чтобы доказать эту формулу, возьмем новую переменную интегрирования $v = p(t) - p(a)$. В силу условия 1) связь между t и v взаимно однозначна. Введем обозначения

$$\beta = p(b) - p(a), \quad f(v) = q(t)/p'(t). \quad (13.05)$$

Тогда

$$I(x) = e^{ixp(a)} \int_0^\beta e^{ixv} f(v) dv.$$

Как и в § 7.3, из условия 2) вытекает, что

$$f(v) \sim \frac{Qv^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \quad (v \rightarrow +0).$$

Кроме того, в данном случае это соотношение можно дифференцировать. Поэтому

$$\int_0^\beta e^{ixv} f(v) dv = \frac{Q}{\mu P^{\lambda/\mu}} \left\{ \int_0^\infty e^{ixv} v^{(\lambda/\mu)-1} dv - \varepsilon_1(x) \right\} + \varepsilon_2(x), \quad (13.06)$$

где

$$\varepsilon_1(x) = \int_\beta^\infty e^{ixv} v^{(\lambda/\mu)-1} dv, \quad \varepsilon_2(x) = \int_0^\infty e^{ixv} \varphi(v) dv$$

и

$$\varphi(v) = f(v) - \frac{Qv^{(\lambda/\mu)-1}}{\mu P^{\lambda/\mu}} \quad \text{или} \quad 0, \quad (13.07)$$

в зависимости от того, лежит v внутри или вне интервала $(0, \beta)$.

Интеграл в правой части (13.06) можно вычислить с помощью леммы 12.1 и получить требуемое приближение (13.04).

Далее, лемма 12.2 показывает, что

$$\varepsilon_1(x) = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

¹⁾ Если $\mu = 1$, то они интерпретируются как $p'(t) \rightarrow P$ и $p''(t) = o\{(t-a)^{-1}\}$. Аналогично, $q'(t) = o\{(t-a)^{-1}\}$ в случае $\lambda = 1$.

Легко проверить, используя сформулированные выше условия, что функция $\varphi(v)$, определенная формулами (13.07) и (13.05), удовлетворяет условиям леммы 12.3 при $\alpha = \lambda/\mu$. Поэтому

$$\varepsilon_2(x) = o(x^{-\lambda/\mu}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Поскольку $\lambda/\mu < 1$, оценка $O(x^{-1})$ для $\varepsilon_1(x)$ может быть включена в оценку $O(x^{-\lambda/\mu})$ для $\varepsilon_2(x)$, и доказательство теоремы 13.1 завершено.

13.3. Теорема 13.2. *Предположим, в дополнение к условиям § 13.1, что $\lambda \geq \mu$ и $\mathcal{W}_{a,b}\{q(t)/p'(t)\} < \infty$. Тогда*

$$I(x) = - \lim_{t \rightarrow a+0} \left\{ \frac{q(t)}{p'(t)} \right\} \frac{e^{ixp(t)}}{ix} + \lim_{t \rightarrow b-0} \left\{ \frac{q(t)}{p'(t)} \right\} \frac{e^{ixp(t)}}{ix} + \varepsilon(x), \quad (13.08)$$

где $\varepsilon(x) = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow \infty$.

Существование обоих пределов в правой части (13.08) при $\lambda \geq \mu$ вытекает из условий 2) и 4) § 13.1. Равенство (13.03) даст следующий интеграл для остаточного члена:

$$\varepsilon(x) = - \frac{e^{ixp(n)}}{ix} \int_0^\beta e^{i\lambda t f'(v)} dv,$$

где β и $f(v)$ определены формулами (13.05). Наложённые условия показывают, что интеграл сходится абсолютно и равномерно во всей области интегрирования; поэтому из леммы Римана — Лебега сразу следует искомый результат $\varepsilon(x) = x^{-1}o(1)$.

Следует отметить, что если $\lambda > \mu$ и $p(b) = \infty$, то оба предела в (13.08) равны нулю. В этом случае теорема дает лишь порядок величины $I(x)$, но не асимптотическую оценку (ср. § 6.3).

13.4. В качестве иллюстративного примера мы рассмотрим интеграл Эйри с отрицательным аргументом:

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}w^3 - xw\right) dw \quad (x > 0).$$

Стационарные точки подынтегрального выражения удовлетворяют уравнению $w^2 - x = 0$, откуда $w = x^{1/2}$ или $-x^{1/2}$; первый корень лежит в области интегрирования. Подстановка $w = x^{1/2}(1+t)$ дает

$$\text{Ai}(-x) = \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_{-1}^\infty \cos\left\{x^{3/2}\left(-\frac{2}{3} + t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\right\} dt. \quad (13.09)$$

Заменим в обозначениях § 13.1 x на $x^{3/2}$ и положим

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad p(t) = -\frac{2}{3} + t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad q(t) = 1.$$

Тогда $p(a) = -2/3$, $P = 1$, $\mu = 2$ и $Q = \lambda = 1$. Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ отношение $q(t)/p'(t)$ стремится к нулю и его вариация сходится. Таким образом, условия 1) и 4) § 13.1 выполнены.

Используя теорему 13.1, мы получаем

$$\int_0^{\infty} \exp \{ix^{3/2}p(t)\} dt \sim \frac{1}{2} \pi^{1/2} e^{\pi i/4} x^{-3/4} \exp \left(-\frac{2}{3} ix^{3/2} \right).$$

Меняя знак перед t и снова используя теорему 13.1, можно убедиться, что то же самое приближение справедливо для интеграла в пределах от -1 до 0 . Отделяя действительные части и подставляя в (13.09), мы приходим к искомому результату:

$$\text{Ai}(-x) = \pi^{1/2} x^{-1/4} \cos \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) + o(x^{-1/4}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Более сложные задачи могут потребовать предварительных преобразований типа тех, которые были указаны для метода Лапласа в конце § 7.5.

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Показать, что

$$\int_0^{\pi/2} t \sin(x \cos t) dt = x^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \cos x \right) + o(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \pm \infty).$$

13.2. Функции Ангера и Вебера определяются соответственно формулами

$$J_v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(v\theta - x \sin \theta) d\theta, \quad E_v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(v\theta - x \sin \theta) d\theta.$$

Доказать, что если значение v действительно и фиксировано, а x велико и положительно, то

$$J_v(x) + iE_v(x) \sim 2^{1/2} (\pi x)^{-1/2} \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} v\pi + \frac{1}{4} \pi - x \right) \right\},$$

$$J_{vx}(x) + iE_{vx}(x) = \frac{i}{(v-1)\pi x} - \frac{i \exp(iv\pi x)}{(v+1)\pi x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (|v| > 1),$$

$$J_{vx}(x) + iE_{vx}(x) \sim 2^{1/2} (\pi x \sin \alpha)^{-1/2} \exp \left\{ i \left(x\alpha \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$(|v| < 1, \alpha = \arccos v),$$

$$J_x(x) \sim 2^{-2/3} 3^{-1/6} \pi^{-1/4} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) x^{-1/3}, \quad E_x(x) \sim 6^{-2/3} \pi^{-1/4} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) x^{-1/3}$$

и

$$J_{-x}(x) + iE_{-x}(x) \sim 2^{1/3} 3^{-2/3} \pi^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) x^{-1/3} \exp\left\{i\pi\left(\frac{1}{6} - x\right)\right\}.$$

13.3. Используя равенство (9.13) из главы 2, доказать, что в обозначениях упр. 7.2 и 13.2

$$J_v(x) = J_v(x) + \pi^{-1} \sin(\pi v) A_v(x).$$

13.4. Показать, что при больших положительных x

$$\int_1^{\infty} (1 - e^{-t}) e^{ixt(1 - \ln t)} dt \sim -(i/x) e^{ix}.$$

13.5. Показать, что при больших положительных x

$$\int_0^{\infty} t \exp\{it^2(\ln t - x)\} dt \sim (\pi/c)^{1/2} \exp\left(x - \frac{1}{2}ie^{2x-1} + \frac{1}{4}\pi i\right).$$

§ 14*. Асимптотические разложения на основе метода стационарной фазы

14.1. Предположим, что $p(t)$ возрастает в интервале (a, b) , а в окрестности точки $t = a$ функции $p(t)$ и $q(t)$ можно разложить в ряды по возрастающим степеням разности $t - a$. В §§ 7 и 8 мы видели, что асимптотическое разложение интеграла

$$\int_a^b e^{-xp(t)} q(t) dt \quad (14.01)$$

при больших значениях x может быть построено с помощью преобразования¹⁾ к виду

$$e^{-xp(a)} \int_0^{p(b)-p(a)} e^{-xvf(v)} dv,$$

разложения функции $f(v)$ по возрастающим степеням v и формального почленного интегрирования в интервале $(0, \infty)$.

Аналогичная процедура имеет место и для осцилляторного интеграла

$$\int_a^b e^{ixp(t)} q(t) dt.$$

Однако здесь возникают, по сравнению с (14.01), два главных

¹⁾ Заменой переменных $p(t) - p(a) = v$. — Прим. ред.

усложнения. Во-первых, прямое интегрирование членов разложения функции $f(v)$ в интервале $(0, \infty)$ допустимо только для нескольких первых членов. (Это связано с тем, что интеграл

$\int_0^{\infty} e^{ixv} v^{\alpha-1} dv$ расходится при $\alpha \geq 1$.) Во вторых, верхний предел b дает вклад в окончательное асимптотическое разложение, когда $p(b)$ конечно, независимо от того, является $t = b$ стационарной точкой или нет.

Исследование этих вопросов можно найти в работах Эрдейи (1962, § 2.9), Лайнсса (1971) и Олвера (1974); две последние содержат методы оценки остаточных членов. Существуют и другие методы, например, те, которые будут изложены в главах 4 и 7; с их помощью вычисление высших членов и оценки остатков могут оказаться более простыми.

Исследование этих вопросов можно найти в работах Эрдейи (1962, § 2.9), Лайнсса (1971) и Олвера (1974); две последние содержат методы оценки остаточных членов. Существуют и другие методы, например, те, которые будут изложены в главах 4 и 7; с их помощью вычисление высших членов и оценки остатков могут оказаться более простыми.

Исторические сведения и дополнительные ссылки

§ 3. Уаймен и Уолг (1969) отметили, что результат Ватсона можно рассматривать как частный случай теоремы Барнса (1906). В настоящем виде он сформулирован Дёчем (1955, стр. 45).

§ 4. 1) Неправильное представление, — возможно, происходящее от того значения, которое придается в настоящее время лебеговой теории интегрирования, — заключается в том, что лемма Римана — Лебега применима лишь к абсолютно сходящимся интегралам. Однако равномерной сходимости вполне достаточно.

2) Обобщение леммы Римана — Лебега было дано Блайстейном, Хандлеманом и Лью (1972).

§ 6. Интересно отметить, что в приложении к работе, опубликованной за много лет до определения Пуанкаре асимптотического разложения, Стокс (1857) указал, что численные результаты, полученные из асимптотического разложения интеграла Эйри, значительно улучшаются, если учитывать экспоненциально малые члены.

§§ 7—9. Вслед за Лапласом результаты в теории приближения Лапласа были получены Буркхардтом (1914), Позна и Сеге (1956), Уиддером (1941, глава 7) и Эрдейи (1962, § 2.4). В данной книге §§ 7—9 основаны на последней указанной работе и статье Олвера (1968). Обобщения метода Лапласа рассмотрены в главе 4.

§§ 9.2—9.3. Третий путь преодоления трудности — использование мажоранты вида

$$|\Psi_n(t)| \leq |a_n| t^{(n+\lambda-\mu)/\mu} \exp(\hat{\rho}_n t^{1/\mu}).$$

Этот вопрос обсуждался Олвером (1968) в случае $\mu = 2$ и Д. С. Джоунсом (1972) для $\mu \geq 2$.

§ 11—14. Метод стационарной фазы берет свое начало в принципе интерференции волн. Он был использован Стоксом (1850) при исследовании интеграла Эйри (§ 13.4) и сформулирован в более общем виде Кельвинном (1887). Дальнейшие результаты в этой теории принадлежат Пуанкаре (1904), Ватсону (1918в), ван дер Корпуту (1934, 1936), Эрдейи (1955), Д. С. Джоунсу (1966) и Ципрулису (1969). Дьедонне (1968, стр. 125) доказал теорему 13.1 в случае $p(b) < \infty$, но приведенная в § 13.2 формулировка является не-

сколько более общей, чем предыдущие результаты, касающиеся первого приближения. В последнее время работы по дифракции и другие задачи потребовали обобщения метода на кратные интегралы. Эти вопросы выходят за рамки настоящей книги; обзоры и ссылки можно найти у Бойна (1965), Чанго (1965), Федорюка (1965), де Кока (1971), Влайстейна и Ханделсмана (1975).

С момента своего рождения метод стационарной фазы, больше чем любой другой результат в теории асимптотических разложений, был окутан некоторой таинственностью. До некоторой степени это отношение продолжает оставаться. Метод часто рассматривается как слабый, подходящий лишь для вычисления первого члена асимптотического разложения; его либо избегают, либо рассматривают как частный случай метода, основанного на теории для комплексной переменной (и поэтому требуют, чтобы функции $p(t)$ и $q(t)$ были аналитическими). Эта точка зрения необоснованна. В основных чертах метод стационарной фазы сходен с методом Лапласа. Главное отличие состоит в более жестких ограничениях на дифференцируемость данных функций $p(t)$ и $q(t)$, более сложных доказательствах и более слабых оценках.

§ 1. Интегралы Лапласа с комплексным параметром

1.1. Теорию, изложенную в главе 3 § 2, легко обобщить на интеграл

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} q(t) dt, \quad (1.01)$$

в котором z — комплексный параметр. Мы снова предположим, что $q(t)$ — действительная или комплексная функция, бесконечно дифференцируемая в $[0, \infty)$ и удовлетворяющая условию

$$|q^{(n)}(t)| \leq A_n e^{\sigma t} \quad (t \geq 0), \quad (1.02)$$

где A_n и σ — действительные постоянные, причем σ не зависит от n . Не теряя общности, можно предположить, что $\sigma \geq 0$.

Основной результат имеет вид

$$I(z) = \frac{q(0)}{z} + \frac{q'(0)}{z^2} + \dots + \frac{q^{(n-1)}(0)}{z^n} + \varepsilon_n(z) \quad (\operatorname{Re} z > \sigma),$$

где n — произвольное положительное целое число или нуль,

$$\varepsilon_n(z) = \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty} e^{-zt} q^{(n)}(t) dt \quad (1.03)$$

и

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{A_n}{|z|^n (\operatorname{Re} z - \sigma)}. \quad (1.04)$$

Предположим, что z принадлежит сектору

$$|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta, \quad |z| > \sigma \operatorname{cosec} \delta, \quad (1.05)$$

где δ — постоянное число из интервала $(0, \pi/2)$. Тогда $\operatorname{Re} z \geq |z| \sin \delta > \sigma$ и

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{A_n}{|z|^n (|z| \sin \delta - \sigma)}.$$

Поэтому при $z \rightarrow \infty$ в (1.05) имеем

$$I(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{(s)}(0)}{z^{s+1}}. \quad (1.06)$$

В предположении, что $q^{(n)}(0) \neq 0$, удобная форма оценки (1.04) для n -го остаточного члена в последнем разложении имеет вид

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{|q^{(n)}(0)|}{|z|^n (\operatorname{Re} z - \sigma_n)} \quad (\operatorname{Re} z > \max(\sigma_n, 0)), \quad (1.07)$$

где

$$\sigma_n = \sup_{(0, \infty)} \left\{ \frac{1}{t} \ln \left| \frac{q^{(n)}(t)}{q^{(n)}(0)} \right| \right\}. \quad (1.08)$$

Как и в случае действительных переменных (глава 3, упр. 3.3), наложенные на $q(t)$ ограничения можно несколько ослабить, сохранив при этом справедливость разложения (1.06). Однако при этих более общих условиях соотношения (1.03) и (1.07) неприменимы.

1.2. Предположим теперь, что $q(t)$, как функция комплексной переменной t , голоморфна в области, содержащей сектор S : $\alpha_1 \leq \arg t \leq \alpha_2$. (Если $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 2\pi$, то S расположен более чем на одном римановом листе.) Мы потребуем, чтобы S содержал внутри себя луч $\arg t = 0$, так что $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$. Предположим далее, что

$$|q(t)| \leq A e^{\sigma |t|} \quad (t \in S), \quad (1.09)$$

где A и σ — неотрицательные постоянные.

Пусть δ — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\alpha_1 + \delta \leq 0 \leq \alpha_2 - \delta$. Тогда метод главы 1, § 4.3 дает

$$|q^{(s)}(t)| \leq A_s e^{\sigma |t|} \quad (\alpha_1 + \delta \leq \arg t \leq \alpha_2 - \delta), \quad (1.10)$$

где A_s не зависит от t . В частности, если $\arg t = 0$, условия § 1.1 удовлетворены, и справедлива формула (1.06). В данном случае область справедливости асимптотического разложения можно расширить следующим образом.

Пусть R — произвольное положительное число, а β — произвольный угол из интервала $0 \leq \beta \leq \min(-\alpha_1 - \delta, \pi/2)$. По теореме Коши

$$\int_0^R e^{-zt} q^{(n)}(t) dt = \int_0^{Re^{-i\beta}} e^{-zt} q^{(n)}(t) dt - \int_{\mathcal{C}} e^{-zt} q^{(n)}(t) dt, \quad (1.11)$$

где \mathcal{C} — дуга, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$t = R e^{i\chi} \quad (0 \leq \chi \leq \beta).$$

(рис. 1.1). Введем обозначение $\theta \equiv \arg z$ и предположим, что $0 < \delta < \pi/4$ и $\delta \leq \theta \leq (\pi/2) - \delta$. Тогда $|\theta - \chi| \leq (\pi/2) - \delta$; следовательно, на \mathcal{C}

$$\operatorname{Re}(zt) = |z|R \cos(\theta - \chi) \geq |z|R \sin \theta.$$

Поэтому, используя (1.10) при $s = n$, мы получаем

$$\left| \int_{\mathcal{C}} e^{-zt} q^{(n)}(t) dt \right| \leq A_n R \beta \exp(-|z|R \sin \delta + \sigma R);$$

это выражение стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ при условии $|z| > \sigma \operatorname{cosec} \delta$.

Мы покажем, таким образом, что

$$\varepsilon_n(z) = \frac{1}{z^n} \int_0^{\infty e^{-i\beta}} e^{-zt} q^{(n)}(t) dt \quad (1.12)$$

при условиях $\delta \leq \arg z \leq (\pi/2) - \delta$ и $|z| > \sigma \operatorname{cosec} \delta$. В силу (1.10) этот интеграл определяет голоморфную функцию z в области, которая содержит сектор

$$|\arg(ze^{-i\beta})| \leq (\pi/2) - \delta, \quad |z| > \sigma \operatorname{cosec} \delta \quad (1.13)$$

(ср. теорему 1.1 главы 2). Поэтому (1.12) осуществляет аналитическое продолжение $\varepsilon_n(z)$ в эту область. В частности, при $n = 0$ мы получаем аналитическое продолжение интеграла $I(z)$.

1.3. Из (1.10) и (1.12) вытекает соотношение $\varepsilon_n(z) = O(z^{-n-1})$, и поэтому разложение (1.06) справедливо в секторе $|\arg ze^{-i\beta}| \leq (\pi/2) - \delta$ в предположении, что $I(z)$ рассматривается как аналитическое продолжение первоначального интеграла.

Если $\alpha_1 \geq -(\pi/2) - \delta$, то наибольшее значение, которое может принимать β , равно $-\alpha_1 - \delta$. При этом сектор, где справедливо разложение, расширяется от $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ до $-(\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq -\alpha_1 + (\pi/2) - 2\delta$.

Если же $\alpha_1 < -(\pi/2) - \delta$, то мы можем положить $\beta = \pi/2$; при этом сектор, в котором справедливо разложение, принимает вид $-(\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$. И в этом случае можно провести дальнейшие повороты пути интегрирования в отрицательном направлении. Каждый из поворотов меньше либо равен $\pi/2$, а максимальное допустимое полное вращение равно $\beta = -\alpha_1 - \delta$.

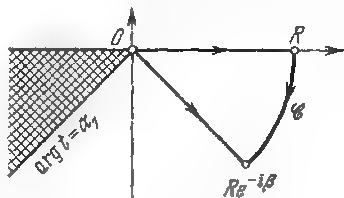


Рис. 1.1. t плоскость

Аналогичным образом путь интегрирования можно повернуть на положительный угол до $\alpha_2 - \delta$. Заменяя 2δ на δ , получаем:

Теорема 1.1. Пусть $I(z)$ обозначает $\int_0^\infty e^{-zt} q(t) dt$ или аналитическое продолжение этого интеграла. При условиях, сформулированных в начале § 1.2,

$$I(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{(s)}(0)}{z^{s+1}} \quad (1.14)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $-\alpha_2 - (\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq -\alpha_1 + (\pi/2) - \delta$, где $\delta > 0$.

Если $\alpha_2 - \alpha_1 > \pi$, то разложение (1.14) справедливо в секторе с углом, превышающим 2π . В этом случае теорема 7.2 главы 1 показывает, что для разложения (1.14) сходится для всех достаточно больших $|z|$ или $I(z)$ имеет точку ветвления на бесконечности.

1.4. Соответствующее обобщение оценки (1.07) для остаточного члена имеет вид

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{|q^{(n)}(0)|}{|t|^n \{ \operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) - \sigma_n(\beta) \}}, \quad (1.15)$$

где n — произвольное положительное целое число или нуль, β — произвольный угол из интервала $(-\alpha_2, -\alpha_1)$,

$$\sigma_n(\beta) = \sup_{\arg t = -\beta} \left\{ \frac{1}{|t|} \ln \left| \frac{q^{(n)}(t)}{q^{(n)}(0)} \right| \right\}, \quad (1.16)$$

а z ограничено условиями

$$|\arg(ze^{-i\beta})| < \pi/2, \quad \operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > \max\{\sigma_n(\beta), 0\}. \quad (1.17)$$

Для заданного значения z величина правой части оценки (1.15) зависит от значения β . Если снова обозначить $\arg z$ через θ , то отношение абсолютной величины первого отбрасываемого члена ряда (1.14) к правой части (1.15) равно $\cos(\theta - \beta) - |z|^{-1} \sigma_n(\beta)$. Для больших $|z|$ это отношение приблизительно равно $\cos(\theta - \beta)$. Если $-\alpha_2 < \theta < -\alpha_1$, мы можем положить $\beta = \theta$, и в этом случае отношение приблизительно равно единице для больших $|z|$, что является идеальным результатом.

Если θ лежит в одном из оставшихся интервалов $[-\alpha_1, -\alpha_1 + (\pi/2))$ или $(-\alpha_2 - (\pi/2), -\alpha_2]$, то β должно быть отличным от θ . Когда θ приближается к $-\alpha_1 + (\pi/2)$ или $-\alpha_2 - (\pi/2)$, величина правой части оценки (1.15) отличается от абсолютного значения первого отбрасываемого члена возрастающим множителем. Это говорит о том, что прямое использование асимптотического разложения вблизи границ области справедливости разложения может привести к значительным неточностям.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Показать при условиях § 1.1, что формула (1.06) верна также и в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \sigma + \delta$.

1.2. Пусть $I(x)$ обозначает аналитическое продолжение интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2 (x + \ln t)^{1/3}}$$

от значения $\arg x = 0$ в комплексную плоскость. Какова область справедливости асимптотического разложения для $I(x)$, данного в главе 3, упр. 2.5?

1.3. Показать, что число $\sigma_n(\beta)$, определенное формулой (1.16), удовлетворяет неравенству

$$\lambda_n \cos(\mu_n - \beta) \leq \sigma_n(\beta) \leq \sup_{\arg t = -\beta} \left| \frac{q^{(n+1)}(t)}{q^{(n)}(t)} \right|,$$

т.е.

$$\lambda_n e^{i\mu_n} = \frac{q^{(n+1)}(0)}{q^{(n)}(0)} \quad (\text{Олвер, 1965a}).$$

§ 2. Неполная гамма-функция комплексного аргумента

2.1. Применим изложенную выше теорию к интегралу

$$\Gamma(\alpha, z) = e^{-z} z^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-t} (1+t)^{\alpha-1} dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.01)$$

в котором все функции имеют главные значения. Это выражение можно вывести из формулы (5.04) главы 2 простой заменой переменной интегрирования, если z положительно; обобщение на $|\arg z| < \pi/2$ осуществляется с помощью аналитического продолжения.

В обозначениях § 1 имеем

$$q(t) = (1+t)^{\alpha-1}, \quad q^{(s)}(t) = (\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-s)(1+t)^{\alpha-1-s}.$$

Исключая случай, когда α — положительное целое число (в этом случае интеграл (2.01) выражается через элементарные функции), $q(t)$ имеет особенность при $\alpha = -1$. Поэтому мы возьмем $\alpha_1 = -\pi + \delta$ и $\alpha_2 = \pi - \delta$. Ясно, что условие (1.09) выполнено, если σ является либо нулем, либо положительным числом. Заменяя 2δ на δ в теореме 1.1, мы получаем разложение

$$\Gamma(\alpha, z) = e^{-z} z^{\alpha-1} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-s)}{z^s} + \varepsilon_n(z) \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (2.02)$$

где $\varepsilon_n(z) = O(z^{-n})$, когда $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| < (3\pi/2) - \delta$; α — фиксированное число.

2.2. При выводе оценки для $\varepsilon_n(z)$ мы сделаем упрощающее предположение и будем считать α действительным числом. Определение (1.16) дает

$$\sigma_n(\beta) = \sup_{\arg t = -\beta} \left(\frac{\alpha - n - 1}{|t|} \ln |1 + t| \right). \quad (2.03)$$

Из (1.15) и (1.17) мы получаем оценку

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)}{|z| \cos(\theta - \beta) - \sigma_n(\beta)} \frac{1}{|z|^{n-1}}, \quad (2.04)$$

где $\beta \in (-\pi, \pi)$ — произвольное число, $\theta = \arg z$, а z удовлетворяет условиям

$$|\theta - \beta| < \frac{\pi}{2}, \quad |z| \cos(\theta - \beta) > \sigma_n(\beta).$$

Основная проблема при анализе остаточных членов состоит в вычислении или оценке величины $\sigma_n(\beta)$.

2.3. Предположим сначала, что $n \leq \alpha - 1$ (что может быть лишь в случае $\alpha \geq 1$). Из (2.03) получаем

$$\sigma_n(\beta) = (\alpha - n - 1) \sup_{\tau \in (0, \infty)} \left\{ \frac{\ln(1 + 2\tau \cos \beta + \tau^2)}{2\tau} \right\}. \quad (2.05)$$

Для положительных τ и действительных β

$$\frac{\ln(1 + 2\tau \cos \beta + \tau^2)}{2\tau} \leq \frac{\ln(1 + \tau)}{\tau} < 1.$$

Следовательно, $\sigma_n(\beta) \leq \alpha - n - 1$. При $\beta = \theta$ неравенство (2.04) дает оценку

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)}{|z| - (\alpha - n - 1)} \frac{1}{|z|^{n-1}}, \quad (2.06)$$

справедливую при $-\pi < \theta < \pi$ и $|z| > \alpha - n - 1$. Так как $\varepsilon_n(z)$ — непрерывная функция θ в интервале $(-3\pi/2, 3\pi/2)$ и правая часть (2.06) не зависит от θ , то первое из указанных условий может быть ослаблено до $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Таким образом, достаточные условия справедливости оценки (2.06) имеют вид

$$|z| > \alpha - n - 1 \geq 0, \quad |\arg z| \leq \pi. \quad (2.07)$$

Далее, взяв β отличным от θ , мы получим оценки для $|\varepsilon_n(z)|$, которые применимы в секторах $\pi < |\theta| < 3\pi/2$. Эти оценки становятся бесконечно большими, когда θ приближается к $\pm 3\pi/2$; однако эти случаи имеют лишь теоретический интерес, поскольку на практике для вычисления $\Gamma(\alpha, z)$ вне области $\arg z \in [-\pi, \pi]$ используется формула продолжения (5.06) главы 2.

2.4. Предположим теперь, что $n \geq \alpha - 1$. Вместо (2.05) имеем

$$\sigma_n(\beta) = (n - \alpha + 1)\sigma(\beta),$$

где

$$\sigma(\beta) = \sup_{\arg t = -\beta} \left\{ -\frac{\ln |1 + t|}{|t|} \right\} = \sup_{\tau \in (0, \infty)} \left\{ -\frac{1}{2\tau} \ln(1 + 2\tau \cos \beta + \tau^2) \right\}. \quad (2.08)$$

Ясно, что если $|\beta| \leq \pi/2$, то $\sigma(\beta) = 0$. Полагая $\beta = \theta$, мы получаем оценку

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{|(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)|}{|z|^n} \quad \left(n \geq \alpha - 1, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.09)$$

Другими словами, при этих условиях остаточный член ограничен абсолютным значением первого отброшенного члена разложения.

Если $\pi/2 \leq \theta < \pi$, то мы можем положить $\beta = \pi/2$. Тогда

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{|(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)|}{|z|^n \sin \theta} \quad \left(n \geq \alpha - 1, \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \right). \quad (2.10)$$

При замене $\sin \theta$ на $|\sin \theta|$ этот результат остается справедливым и при $-\pi < \theta \leq -\pi/2$. С другой стороны, мы можем снова положить $\beta = \theta$. В этом случае

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \frac{|(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)|}{|z| - (n - \alpha + 1)\sigma(\theta)} \cdot \frac{1}{|z|^{n-1}} \quad (2.11)$$

при $n \geq \alpha - 1$, $\pi/2 \leq |\theta| < \pi$, $|z| > (n - \alpha + 1)\sigma(\theta)$. Численное значение $\sigma(\theta)$ можно получить из определяющей $\sigma(\beta)$ формулы (2.08) (его можно заменить оценкой сверху, приведенной в упр. 2.3). Правая часть (2.11) ведет себя асимптотически как $|(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)z^{-n}|$ при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, оценка (2.11) лучше, чем (2.10), когда значение $|z|$ достаточно велико, а именно, когда

$$|z| > \frac{(n - \alpha + 1)\sigma(\theta)}{1 - |\sin \theta|}.$$

Противоположное утверждение верно, когда $|z|$ не слишком велико; действительно, оценка (2.11) неприменима, если $|z| \leq (n - \alpha + 1)\sigma(\theta)$.

Обе формулы, (2.10) и (2.11), теряют смысл, когда θ приближается к $\pm\pi$, поскольку $\sin \theta$ обращается в нуль и значение $\sigma(\theta)$ становится бесконечным; однако удобные оценки в этой области можно получить, выбирая другие значения β в (2.04). Например, значение $\beta = 3\pi/4$ приводит к приемлемым оценкам

при

$$|z| \cos(\theta - (3\pi/4)) > (n - \alpha + 1) \sigma(3\pi/4) \quad (n \geq \alpha - 1);$$

в частности, этим охватывается верхний берег отрицательной действительной полуоси слева от точки $-2^n(n - \alpha + 1)\sigma(3\pi/4)$.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. В упр. 1.2 главы 3 дано асимптотическое разложение для $\operatorname{erfc} x$. Какова область справедливости этого разложения в комплексной плоскости?

2.2. Доказать для обобщенной интегральной показательной функции (глава 2, упр. 3.5) при фиксированном n и большом $|z|$ в области $|\arg z| \leq (3\pi/2) - \delta$ ($\delta < 3\pi/2$) формулу

$$E_n(z) \sim \frac{e^{-z}}{z} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{n(n-1) \dots (n-s+1)}{z^s}.$$

2.3. Показать, что при $\pi/2 < |\beta| < \pi$ число $\sigma(\beta)$, определенное равенством (2.08), удовлетворяет условию

$$|\sec \beta| \ln(|\cos \beta|) \leq \sigma(\beta) \leq 2|\sec \beta| \ln(|\cos \beta|) \quad (\text{Олвер, 1965a}).$$

§ 3. Лемма Ватсона

3.1. Если z — комплексный параметр, то интеграл

$$I(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} q(t) dt \quad (3.01)$$

известен в операционном исчислении под названием *преобразования Лапласа* функции $q(t)$. Его часто обозначают через $\mathcal{L}(q)$ или $\bar{q}(z)$, а в работах по операционному исчислению z обычно заменяют переменной p ; таким образом,

$$\mathcal{L}(q) = \int_0^{\infty} e^{-pt} q(t) dt.$$

Если (3.01) сходится при некотором значении z , естественно ожидать сходимости также и в случае, когда экспоненциальный множитель под знаком интеграла убывает быстрее.

Теорема 3.1. (Дёч (1950), стр. 35 и 549). Пусть $q(t)$ — действительная или комплексная функция положительной действительной переменной t , которая разрывна или обращается в бесконечность в конечном числе точек. Если интеграл (3.01) сходится при $z = z_0$, то он сходится и при $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Доказательство аналогично рассуждениям главы 3, § 3.2. Положим

$$Q(t) = \int_0^t e^{-z_0 v} q(v) dv;$$

функция $Q(t)$ непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$. Если $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, то

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} q(t) dt = (z - z_0) \int_0^{\infty} e^{-(z-z_0)t} Q(t) dt.$$

Поскольку функция $|Q(t)|$ ограничена, интеграл в правой части сходится (абсолютно) и, следовательно, сходится интеграл в левой части.

3.2. Из теоремы 3.1 вытекает, что для $I(z)$ в комплексной области могут иметь место следующие три возможности: а) $I(z)$ сходится при всех z ; б) $I(z)$ расходится при всех z ; в) существует такое число ξ , что $I(z)$ сходится при $\operatorname{Re} z > \xi$ и расходится при $\operatorname{Re} z < \xi$. Число ξ называется *абсциссой сходимости* $I(z)$; мы будем писать $\xi = -\infty$ в случае а) и $\xi = +\infty$ в случае б). Кроме того, заменяя $q(t)$ на $|q(t)|$ в рассуждениях, легко убедиться, что существует также *абсцисса абсолютной сходимости*¹⁾ ξ_A . Очевидно, что $\xi \leq \xi_A$.

3.3. Теорема 3.2. Предположим, что

- 1) $q(t)$ — действительная или комплексная функция положительной действительной переменной t , имеющая конечное число точек, в которых она разрывна или обращается в бесконечность;
- 2) при $t \rightarrow +0$

$$q(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}, \quad (3.02)$$

где μ — положительная постоянная, а λ — действительная или комплексная постоянная, причем $\operatorname{Re} \lambda > 0$;

3) абсцисса сходимости интеграла (3.01) не равна $+\infty$. Тогда

$$I(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (3.03)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ ($< \pi/2$), где для $z^{(s+\lambda)/\mu}$ выбирается главное значение.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 из главы 3. Как и раньше, положим

$$\Phi_n(t) = q(t) - \sum_{s=0}^{n-1} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}, \quad (3.04)$$

и возьмем такие положительные числа k_n и K_n , что

$$|\Phi_n(t)| \leq K_n t^{(n+\operatorname{Re} \lambda - \mu)/\mu} \quad (0 < t \leq k_n).$$

¹⁾ Т. е. абсцисса сходимости для $|q(t)|$. — *Прим. ред.*

Тогда

$$\left| \int_0^{k_n} e^{-zt} \varphi_n(t) dt \right| < \Gamma\left(\frac{n + \operatorname{Re} \lambda}{\mu}\right) \frac{K_n}{(\operatorname{Re} z)^{(n + \operatorname{Re} \lambda)/\mu}} = O\left(\frac{1}{z^{(n + \lambda)/\mu}}\right) \quad (3.05)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$.

Положим

$$L_n \equiv \sup_{t \in [k_n, \infty)} \left| \int_{k_n}^t e^{-Xv} \varphi_n(v) dv \right|,$$

где X — положительное действительное значение z , для которого $I(z)$ сходится; тогда при $\operatorname{Re} z > X$ имеем

$$\left| \int_{k_n}^{\infty} e^{-zt} \varphi_n(t) dt \right| \leq \frac{|z - X|}{\operatorname{Re} z - X} L_n \exp\{-(\operatorname{Re} z - X) k_n\}.$$

Поскольку $|z| \leq (\operatorname{Re} z) \operatorname{cosec} \delta$, последнее выражение есть $O\{\exp(-k_n |z| \sin \delta)\}$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$. Объединение этой оценки с (3.05) дает (3.03).

3.4. Теорема 3.3. *Предположим, что:*

1) $q(t)$ — голоморфная функция в секторе $S: \alpha_1 < \arg t < \alpha_2$, где $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$;

2) для каждого $\delta \in (0, \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1)$ разложение (3.02) справедливо в секторе $S_\delta: \alpha_1 + \delta \leq \arg t \leq \alpha_2 - \delta$. Кроме того, пусть $\mu > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda > 0$;

3) $q(t) = O(e^{\sigma|t|})$ при $t \rightarrow \infty$ в S_δ , где σ — заданная постоянная.

Тогда, если $I(z)$ обозначает интеграл (3.01) или его аналитическое продолжение, то разложение (3.03) справедливо в секторе $-\alpha_2 - (\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq -\alpha_1 + (\pi/2) - \delta$.

В сформулированной теореме ветви $t^{(s+\lambda-\mu)/\mu}$ и $z^{(s+\lambda)/\mu}$ принимают главные значения на положительной действительной полуоси и доопределяются по непрерывности всюду.

Обобщение теоремы 3.2 можно получить, поворачивая путь интегрирования, как это было сделано в §§ 1.2 и 1.3¹⁾. Пусть β — любое число из интервала $[-\alpha_2 + \delta, -\alpha_1, -\delta]$. Тогда интеграл

$$\int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-zt} q(t) dt \quad (3.06)$$

¹⁾ Функция $q(t)$ не аналитична при $t = 0$, но поскольку $q(t) = O\left(\frac{\lambda}{t^\mu} - t\right)$ при $t \rightarrow 0$ в S_δ , этот поворот оправдан.

осуществляет аналитическое продолжение $I(z)$ в сектор (1.13). Далее мы применяем теорему 3.2, где в качестве t и z берем соответственно $te^{i\beta}$ и $ze^{-i\beta}$ и затем заменяем 2δ на δ . Как и в случае теоремы 3.2, условие 3) можно ослабить, введя менее ограничительные (но более сложные) условия сходимости с помощью интегрирования по частям.

3.5*. В случае теоремы 3.3 n -й остаточный член разложения (3.03) дается формулой

$$\varepsilon_n(z) = \int_0^{\infty e^{-i\beta}} e^{-zt} \varphi_n(t) dt \quad \left(|\arg(ze^{-i\beta})| < \frac{\pi}{2} \right),$$

где $\varphi_n(t)$ определяется равенством (3.04), а β — любое число из $(-\alpha_2, -\alpha_1)$. В соответствии с этим

$$|\varepsilon_n(z)| \leq \Gamma\left(\frac{n+\lambda_R}{\mu}\right) \frac{\exp(\lambda_1\beta/\mu) |a_n|}{\{\operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) - \sigma_n(\beta)\}^{(n+\lambda_R)\cdot\mu}}, \quad (3.07)$$

где $\lambda_R = \operatorname{Re} \lambda$, $\lambda_I = \operatorname{Im} \lambda$, а

$$\sigma_n(\beta) = \sup_{\arg t = -\beta} \left\{ \frac{1}{|t|} \ln \left| \frac{\varphi_n(t)}{a_n t^{(n+\lambda-\mu)\cdot\mu}} \right| \right\}.$$

Оценка (3.07) справедлива, когда z принадлежит сектору

$$|\arg(ze^{-i\beta})| < \pi/2, \quad \operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > \max\{\sigma_n(\beta), 0\}.$$

Если $\sigma_n(\beta)$ обращается в бесконечность, то можно видоизменить полученный результат так, как это было сделано в §§ 9.2 и 9.3.

Постарайтесь убедиться, что теорема 1.1 является частным случаем (при $\lambda = \mu = 1$) теоремы 3.3. Однако выражения для оценок остаточного члена, соответствующие двум этим теоремам, совершенно не похожи друг на друга. Показатель $\sigma_n(\beta)$ в § 1.4 определяется в терминах n -й производной функции $q(t)$; в предыдущем пункте формула имеет другой вид. Кроме того, для больших значений $|z|$ множитель в завышенной оценке, соответствующей формуле (1.15), приближенно равен $\sec(\theta - \beta)$; для (3.07) (в случае $\lambda = \mu = 1$) он имеет вид $\sec^{n+1}(\theta - \beta)$. Поэтому первая оценка точнее при $\beta \neq \theta$, $n \geq 1$ и достаточно большом $|z|$.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Применяя теорему Коши к прямоугольнику с вершинами 0 , T , $T + (\pi i/2)$, $\pi i/2$ и полагая $T \rightarrow +\infty$, доказать, что абсцисса сходимости преобразования Лапласа функции $q(t) = \exp(iet)$ отличается от абсциссы абсолютной сходимости.

3.2. Показать, что интеграл $\int_0^{\infty} \exp(-z^2 t) \ln(1+t^{1/2}) dt$ и его аналитическое продолжение имеют асимптотическое разложение

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\Gamma(s/2)}{2z^{s+2}}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (5\pi/4) - \delta$ ($\delta < 5\pi/4$).

3.3. Показать, что если α — положительная постоянная, то в секторе $|\arg z| \leq (3\pi/2) - \delta$ ($\delta < 3\pi/2$) аналитическое продолжение интеграла $\int_0^{\infty} \exp\{-z \exp(t^{\alpha})\} dt$ ведет себя как

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{-z}}{z^{1/2}} \left\{1 - \frac{1}{2\alpha^2 z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} \quad (z \rightarrow \infty).$$

3.4. Предположим, что в теореме 3.2 условие 2) заменено требованием

$$f(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} q_s \left(2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}\right)^{2s} \quad (t \rightarrow +0).$$

Показать, что для любого положительного целого n

$$I(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(2s)! q_s}{(z-s)(z-s+1)\dots(z+s)} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ ($\delta < \pi/2$). (Дальнейшие результаты такого рода были получены Эрлейн (1946, 1961).)

3.5*. Для интеграла Гудвина — Стейнтона (глава 2, упр. 4.4) доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-u^2)}{u + z} du = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2z^{s+1}} + \varepsilon_n(z) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где $\varepsilon_n(z) = O(z^{-n-1})$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (5\pi/4) - \delta$ ($\delta < 5\pi/4$).

Показать также, что

$$1) \text{ если } |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то } |\varepsilon_n(z)| \leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) |z|^{-n-1};$$

$$2) \text{ если } \frac{\pi}{2} \leq |\arg z| \leq \frac{3}{4}\pi, \text{ то } |\varepsilon_n(z)| \leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) |z|^{-n-1} + \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) |z|^{-n-2};$$

3) если β — произвольное число, такое, что $\frac{3}{4}\pi \leq |\beta| < \pi$, и если z удовлетворяет неравенствам

$$|\arg(ze^{-i\beta})| < \pi/4, \quad \operatorname{Re}(z^2 e^{-2i\beta}) > \sigma(2|\beta| - \pi),$$

где величина $\sigma(\beta)$ определена формулой (2.08), то

$$|e_n(z)| \leq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2\{\operatorname{Re}(z^2 e^{-2i\beta}) - \sigma(2|\beta| - \pi)\}^{(n+1)/2}} + \\ + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2\{\operatorname{Re}(z^2 e^{-2i\beta}) - \sigma(2|\beta| - \pi)\}^{(n+2)/2}}.$$

3.6*. Пусть в обозначениях и условиях теоремы 3.3 $g(t) = \mu^{n-\lambda} q(t^\mu)$; предположим, что функция $g(t)$ голоморфна в окрестности начала координат. Показать, что выражение для остатка $e_n(z)$ в § 3.5 имеет вид

$$e_n(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty e^{-i\beta/\mu}} g^{(n)}(v) dv \int_v^{\infty e^{-i\beta/\mu}} (t-v)^{n-1} t^{\lambda-1} \exp(-zt^\mu) dt$$

при условиях $-\alpha_2 < \beta < -\alpha_1$, $|\arg(ze^{-i\beta})| < \pi/2$ и $\operatorname{Re}(ze^{-i\beta}) > \sigma$.

3.7*. Поворачивая путь интегрирования во внутреннем интеграле в предыдущем упражнении так, чтобы $\arg t = -\arg z/\mu$, показать, что при $\mu = 2$, $\lambda = 1$, $n \geq 1$, $\theta = \arg z$ и

$$|g^{(n)}(v)| \leq G_n \exp\{\gamma_n(\beta)|v|^2\} \quad (\arg v = -\beta/2),$$

справедлива оценка

$$|e_n(z)| \leq \frac{G_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2|z|^{(n+1)/2} n!} \frac{|z| \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\beta}{2}\right)}{|z| \cos(\theta - \beta) - \gamma_n(\beta)},$$

если знаменатель положителен.

§ 4. Интеграл Эйри с комплексным аргументом; составные асимптотические разложения

4.1. Чтобы выяснить асимптотическое поведение $\operatorname{Ai}(z)$ при больших значениях $|z|$, мы, следуя Копсону (1963), используем представление

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-z^{1/2}t) \cos\left(\frac{1}{3}t^{3/2}\right) t^{-1/2} dt \\ (|\arg z| < \pi), \quad (4.01)$$

в котором степенные функции с дробными показателями принимают главные значения. Этот интеграл можно получить следующим образом. При положительных $z = x$ мы имеем из главы 2, § 8.1

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \exp\left(\frac{1}{3}v^3 - xv\right) dv.$$

Путь интегрирования можно перенести так, что он будет проходить через точку $v = x^{1/2}$ (обоснование этого преобразования будет дано ниже в § 7). Полагая $v = x^{1/2} + it^{1/2}$ на верхней половине нового пути и $v = x^{1/2} - it^{1/2}$ на нижней половине, мы получаем (4.01) при $z = x$. Обобщение представления (4.01) на сектор $|\arg z| < \pi$ вытекает из аналитического продолжения.

Применение теоремы 3.2 к (4.01), где $\lambda = 1/6$, $\mu = 1/3$, а роль z играет функция $z^{1/2}$, приводит к искомому разложению

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{1/2} z^{1/4}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_s}{\xi^s} \quad (4.02)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($< \pi$). Здесь $\xi = 2z^{3/2}/3$, $u_0 = 1$,

$$u_s = \frac{2^s}{3^{3s} (2s)!} \frac{\Gamma\left(3s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2s-1)(2s+3)(2s+5) \dots (6s-1)}{(216)^s s!} \quad (s \geq 1), \quad (4.03)$$

а дробные степени z принимают главные значения.

Для оценки остаточного члена можно использовать формулу Тейлора и написать

$$\left| \cos \tau - \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{\tau^{2s}}{(2s)!} \right| \leq \frac{\tau^{2n}}{(2n)!}$$

(τ — действительное число, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Полагая $\tau = t^{3/2}/3$ мы заключаем, что отношение n -го остаточного члена в (4.02) к n -му члену ряда не превосходит по абсолютной величине $\left\{ \sec\left(\frac{1}{2} \arg z\right) \right\}^{3n+1/2}$. В случае положительных z это означает, что каждый остаток ограничен по абсолютной величине первым отбрасываемым членом разложения.

4.2. Сектор, в котором справедливо разложение (4.02), нельзя расширить с помощью теоремы 3.3, поскольку условие 3) сходимости интеграла (3.01) нарушается вне действительной t оси. Чтобы вывести асимптотическое разложение для $\text{Ai}(z)$, которое справедливо равномерно в области, содержащей отрицательную действительную полуось, мы используем тождество

$$\text{Ai}(-z) = e^{\pi i/3} \text{Ai}(ze^{\pi i/3}) + e^{-\pi i/3} \text{Ai}(ze^{-\pi i/3}), \quad (4.04)$$

вытекающее из формулы (8.06) главы 2.

Пусть l — произвольное положительное целое число, а δ — произвольная постоянная из $\left(0, \frac{2}{3}\pi\right)$. Обрывая разложение (4.02)

на l -м члене и заменяя z на $ze^{\pi i/3}$, мы получаем

$$e^{\pi i/3} \text{Ai}(ze^{\pi i/3}) = \frac{e^{\pi i/4} e^{-i\xi}}{2\pi^{1/2} z^{1/4}} \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \varepsilon_l^{(1)}(\xi) \right\},$$

где

$$\varepsilon_l^{(1)}(\xi) = O(\xi^{-l}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

в секторе $\arg z \in [-(4\pi/3) + \delta, (2\pi/3) - \delta]$.

Соответствующее разложение для $e^{-\pi i/3} \text{Ai}(ze^{-\pi i/3})$ получается заменой i на $-i$ и $\varepsilon_l^{(1)}(\xi)$ на остаток $\varepsilon_l^{(2)}(\xi)$, обладающий свойством $\varepsilon_l^{(2)}(\xi) = O(\xi^{-l})$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $\arg z \in [-(2\pi/3) + \delta, (4\pi/3) - \delta]$. Подставляя эти результаты в (4.04) и группируя слагаемые, мы находим, что

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-z) = \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \left[\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \sum_{s=0}^{[l/2-1/2]} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \eta_l^{(1)}(\xi) \right\} + \right. \\ \left. + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \sum_{s=0}^{[(l/2)-1]} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + \eta_l^{(2)}(\xi) \right\} \right], \quad (4.05) \end{aligned}$$

где

$$2\eta_l^{(1)}(\xi) = \varepsilon_l^{(1)}(\xi) + \varepsilon_l^{(2)}(\xi), \quad 2i\eta_l^{(2)}(\xi) = \varepsilon_l^{(1)}(\xi) - \varepsilon_l^{(2)}(\xi).$$

Очевидно, что $\eta_l^{(1)}(\xi)$ и $\eta_l^{(2)}(\xi)$ ведут себя как $O(\xi^{-l})$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (2\pi/3) - \delta$.

Заменяя l на $2m$ в первой сумме и на $2n+1$ — во второй, мы видим, что

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-z) = \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \left[\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2m}}\right) \right\} + \right. \\ \left. + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + O\left(\frac{1}{\xi^{2n+1}}\right) \right\} \right], \quad (4.06) \end{aligned}$$

где m и n — произвольные целые числа или нули.

Разложения этого типа мы будем называть *составными асимптотическими разложениями*: они имеют два или более остаточных члена, ни один из которых нельзя включать в другие.

Обобщая значение символа \sim , мы пишем

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\pi^{1/2} z^{1/4}} \left\{ \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \right. \\ \left. + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} \right\} \quad (4.07) \end{aligned}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (2\pi/3) - \delta$; ξ и u , определены в § 4.1, а дробные степени принимают главные значения. При $\arg z = 0$ главный член разложения (4.07) был найден в главе 3, § 13.4 методом стационарной фазы.

Следует отметить, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (4.05), можно записать в виде обобщенного асимптотического разложения $\sum \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4} - \frac{s\pi}{2}\right) u_s \xi^{-s}$ со шкалой $e^{i\pi s/2} \xi^{-s}$ (ср. главу 1, § 10.3).

4.3. Из (4.07) немедленно следует, что на отрицательной действительной полуоси функция $\text{Ai}(z)$ меняет знак бесконечно много раз, и поэтому имеет последовательность нулей с предельной точкой $z = -\infty$. Поскольку правая часть (4.02) не стремится к нулю при достаточно больших $|z|$, сектор, в котором справедливо разложение (4.02), нельзя расширить за пределы сектора $|\arg z| < \pi$. По той же причине сектор $|\arg z| < 2\pi/3$ является максимальной областью, в которой справедливо разложение (4.07).

УПРАЖНЕНИЕ

4.1. Проверить, что разложения (4.02) и (4.07) согласуются в пересечении областей, в которых они справедливы, с точностью до слагаемых, экспоненциально убывающих (при больших $|z|$) по сравнению с основным рядом.

§ 5. Отношение двух гамма-функций; лемма Ватсона для интегралов по петле

5.1. Асимптотическое разложение отношения $\Gamma(z+a)/\Gamma(z+b)$ при фиксированных a и b и больших z можно вывести из разложений $\Gamma(z+a)$ и $\Gamma(z+b)$ главы 3 (формула (8.16)) в случае действительных переменных или главы 8, § 4 в случае комплексных переменных, разделив их друг на друга. Мы проиллюстрируем методы настоящей главы, получив требуемое разложение прямо из интеграла, определяющего бета-функцию. При этом предполагается, что a и b — действительные или комплексные постоянные.

Из формулы (1.10) главы 2 имеем

$$\frac{\Gamma(z+a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(z+b)} = \int_0^1 v^{z+a-1} (1-v)^{b-a-1} dv$$

$$(\operatorname{Re}(z+a) > 0, \operatorname{Re}(b-a) > 0),$$

причем дробные степени принимают главные значения. Подстав-

для $v = e^{-t}$, мы получаем равенство

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = \frac{1}{\Gamma(b-a)} \int_0^{\infty} e^{-vt} q(t) dt, \quad (5.01)$$

справедливое при тех же самых ограничениях, где

$$q(t) = e^{-at} (1 - e^{-t})^{b-a-1}.$$

Разложение $q(t)$ по возрастающим степеням t имеет вид

$$q(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s q_s(a, b) t^{s+b-a-1} \quad (|t| < 2\pi),$$

а условия теоремы 3.3 удовлетворяются при $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\lambda = b-a$, $\mu = 1$ и $\sigma = |a|$. Применение теоремы дает искомый результат:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \sim z^{a-b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(a, b)}{z^s} \quad (5.02)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$), где

$$G_s(a, b) = (a-b)(a-b-1) \dots (a-b-s+1) q_s(a, b).$$

Легко проверить, что первые три коэффициента имеют вид

$$G_0(a, b) = 1, \quad G_1(a, b) = \frac{1}{2} (a-b)(a+b-1),$$

$$G_2(a, b) = \frac{1}{24} (a-b)(a-b-1) \{3(a+b)^2 - 7a - 5b + 2\}.$$

5.2. Разложение (5.02) было установлено при условии $\operatorname{Re}(b-a) > 0$. Это ограничение можно устранить следующим образом. Пусть n — произвольное положительное целое число, а $\varphi_n(t)$ определяется для положительных t из соотношения

$$q(t) = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s q_s(a, b) t^{s+b-a-1} + \varphi_n(t), \quad (5.03)$$

так что

$$\varphi_n(t) = \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s q_s(a, b) t^{s+b-a-1} \quad (|t| < 2\pi). \quad (5.04)$$

Подставляя (5.03) в (5.01), мы получаем

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{G_s(a, b)}{z^s} + I_n(a, b, z), \quad (5.05)$$

где

$$I_n(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(b-a)} \int_0^\infty e^{-zt} \Phi_n(t) dt. \quad (5.06)$$

Условия, при которых было установлено равенство (5.05), имеют вид

$$\operatorname{Re}(z+a) > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re}(b-a) > 0.$$

Однако легко видеть на основании формул (5.03) и (5.04), что интегралы $I_n(a, b, z)$ все еще будут сходиться на обоих пределах, если последние условия заменить неравенством $\operatorname{Re}(n+b-a) > 0$. Замечая, что $G_n(a, b)$ — многочлен, мы убеждаемся после аналитического продолжения по b , что равенство (5.05) выполняется при новом условии. Применяя теперь теорему 3.3 к (5.06) и учитывая, что целое число n произвольно, мы заключаем, что *разложение (5.02) справедливо без ограничений на a или b .*

Метод, использованный в этом пункте, часто оказывается полезным в асимптотическом (и численном) анализе. Иногда его называют методом отделения сингулярной части. Мы, в сущности, вычитаем полюсы и другие неприятные особенности из данной функции, вычисляем аналитически их вклад, а затем используем общие асимптотические (или численные) методы для определения вклада оставшейся части.

5.3. Следуя Трикоми и Эрдейи (1951), мы можем обобщить предыдущие рассуждения и получить полезный результат, известный под названием *леммы Ватсона для интегралов по петле*. Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{zt} q(t) dt, \quad (5.07)$$

где путь интегрирования проходит по нижнему и верхнему берегам действительной оси слева от точки $-d$ и по окружности $|t| = d$. Предположим, что $q(t)$ — голоморфная функция, не обязательно однозначная, в области $0 < |t| < d'$, где $d' > d$, и что она непрерывна на пути интегрирования. Тогда рассуждениями, аналогичными проведенным в §§ 3.1 и 3.2, мы можем доказать, что у интеграла (5.07) существует абсцисса сходимости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Примем условия, сформулированные выше в этом пункте и предположим, кроме того, что*

$$q(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (5.08)$$

при $t \rightarrow 0$ в секторе $|\arg t| \leq \pi$, где μ — положительная постоянная, а λ — произвольная действительная или комплексная

постоянная. Тогда

$$I(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Gamma \left(\frac{\mu - \lambda - s}{\mu} \right) \right\}^{-1} \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (5.09)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ ($\delta < \pi/2$).

В этой формулировке все дробные степени принимают главные значения. Как и в лемме Ватсона, предполагается, что абсцисса сходимости интеграла (5.07) конечна или равна $-\infty$; в противном случае формула (5.09) теряет смысл.

Чтобы доказать теорему, положим

$$q(t) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} + \varphi_n(t) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Подставляя сумму в (5.07), интегрируя почленно и используя интеграл Ганкеля по петле для гамма-функции (глава 2, (1.12)), мы получаем первые n членов в формуле (5.09). Далее, из разложения (5.08) вытекает, что $\varphi_n(t)$ имеет порядок $O(t^{(n+\lambda-\mu)/\mu})$ при $t \rightarrow 0$. Если n таково, что $n + \operatorname{Re} \lambda - \mu$ — положительное число, то можно преобразовать интеграл по петле для $e^{zt} \varphi_n(t)$ в интеграл по двум берегам отрицательной действительной полуоси и получить

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{zt} \varphi_n(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} Q_n(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} Q_n(\tau) &= \{\varphi_n(\tau e^{-\pi i}) - \varphi_n(\tau e^{\pi i})\} \frac{1}{2\pi i} \sim \\ &\sim -\frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \left(\frac{s + n + \lambda - \mu}{\mu} \pi \right) a_{s+n} \tau^{(s+n+\lambda-\mu)/\mu} \quad (\tau \rightarrow +0). \end{aligned}$$

Доказательство завершается применением теоремы 3.2 к (5.10) и использованием формулы отражения для гамма-функции.

Читатель, вероятно, обратил внимание на существенное отличие теоремы 5.1 от теоремы 3.2, которое заключается в том, что параметр λ более не обязан принадлежать правой полуоси. Следует, кроме того, отметить, что если область, в которой функция $q(t)$ голоморфна и имеет разложение (5.08), содержит сектор $\alpha_1 < \arg(-t) < \alpha_2$, где $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$, и если $q(t)$ есть $O(e^{\sigma|t|})$ при $t \rightarrow \infty$ в этом секторе, то с помощью теоремы 3.3 разложение (5.09) для $I(z)$ (или для его аналитического продолжения) распространяется на сектор $-\alpha_2 - (\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq -\alpha_1 + (\pi/2) - \delta$, где $\delta > 0$.

§ 6. Метод Лапласа для контурных интегралов

6.1. Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_a^b e^{-z\rho(t)} q(t) dt, \quad (6.01)$$

в котором путь интегрирования \mathcal{P} является контуром в комплексной плоскости, $p(t)$ и $q(t)$ — аналитические функции t , а z — действительный или комплексный параметр. По аналогии с теорией, развитой для интегралов с действительными переменными в главе 3, § 7, мы можем ожидать, что при большом $|z|$ основной вклад в $I(z)$ определяется окрестностью точки $t = t_0$, в которой величина $\operatorname{Re}\{z\rho(t)\}$ достигает минимума. Мы увидим, что предположение справедливо, когда t_0 совпадает с концом \mathcal{P} , но вообще говоря, неверно, если t_0 лежит внутри \mathcal{P} . В последнем случае необходимо деформировать путь интегрирования, прежде чем высчитывать асимптотическое разложение. В этом параграфе мы рассмотрим первый случай.

Удобно ввести следующие обозначения. Пусть t_1 и t_2 — две любые точки контура \mathcal{P} . Часть \mathcal{P} , лежащую между t_1 и t_2 , будем обозначать через $(t_1, t_2)_{\mathcal{P}}$, если концы исключаются, и через $[t_1, t_2]_{\mathcal{P}}$, если они включаются. Аналогично определяются символы $(t_1, t_2]$ и $[t_1, t_2)$. Мы будем также использовать обозначение

$$\omega = \text{угол наклона } \mathcal{P} \text{ в точке } a = \lim\{\arg(t-a)\} \\ (t \rightarrow a \text{ вдоль } \mathcal{P}). \quad (6.02)$$

Предположения:

(I) Функции $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от z , однозначны и голоморфны в области T .

(II) Контур \mathcal{P} не зависит от z , а принимает конечное значение, b — конечное или бесконечное значение, и $(a, b)_{\mathcal{P}} \in T^1$.

(III) В окрестности точки a функции $p(t)$ и $q(t)$ могут быть разложены в сходящиеся ряды вида

$$p(t) = p(a) + \sum_{s=0}^{\infty} p_s (t-a)^{\kappa+s}, \quad q(t) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s (t-a)^{\lambda+s-1},$$

где $p_0 \neq 0$, μ — действительное положительное число, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Если μ или λ — не целые числа, — это может быть лишь в случае, когда a — граничная точка T — верши функций $(t-a)^{\mu}$ и $(t-a)^{\lambda}$ определяются соотношениями

$$(t-a)^{\mu} \sim |t-a|^{\mu} e^{i\mu\omega}, \quad (t-a)^{\lambda} \sim |t-a|^{\lambda} e^{i\lambda\omega}$$

при $t \rightarrow a$ вдоль \mathcal{P} , и по непрерывности всюду на \mathcal{P} .

¹⁾ Таким образом, либо точка a , либо b , либо обе эти точки могут быть концами T .

(IV) Параметр z изменяется вдоль луча или в секторе, заданном неравенствами $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и $|z| \geq Z$, где $\theta \equiv \arg z$, $\theta_2 - \theta_1 < \pi$ и $Z > 0$. Интеграл $I(z)$ сходится абсолютно и равномерно по z в точке b .

(V) Величина $\operatorname{Re} \{e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a)\}$ положительна при $t \in (a, b)_{\rho}$ и ограничена от нуля равномерно по θ при $t \rightarrow b$ вдоль \mathcal{P} .

Замечание. Ни ω , ни θ не обязаны принадлежать главной области $(-\pi, \pi]$, однако когда выбор области сделан, нужно его придерживаться во всех выкладках.

6.2. В рассуждениях следует быть очень осторожным при выборе ветвей встречающихся многозначных функций. Имея это в виду, мы условимся о следующем: значение $\omega_0 \equiv \arg p_0$ не является обязательно главным, но удовлетворяет условию

$$|\omega_0 + \theta + \mu\omega| \leq \pi/2; \quad (6.03)$$

это значение будет использоваться для определения всех дробных степеней p_0 . Например, символ $p_0^{1/2}$ обозначает выражение $\exp\{(\ln|p_0| + i\omega_0)/\mu\}$. Так как

$$e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a) \sim e^{i\theta} p_0(t-a)^\mu$$

при $t \rightarrow a$ вдоль \mathcal{P} (условие (III)) и разность $e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a)$ имеет неотрицательную действительную часть (условие (V)), то всегда можно однозначно выбрать ω_0 указанным образом. Кроме того, поскольку θ заключено в интервале длины меньшей, чем π , значение ω_0 , удовлетворяющее (6.03), не зависит от θ .

Введем новые переменные, v и w , равенствами

$$w^\mu = v = p(t) - p(a). \quad (6.04)$$

Значения $\arg v$ и $\arg w$ определяются условиями

$$\arg v, \mu \arg w \rightarrow \omega_0 + \mu\omega \quad (t \rightarrow a \text{ вдоль } \mathcal{P}) \quad (6.05)$$

и по непрерывности всюду. Здесь снова имеется в виду, что эти значения $\arg v$ и $\arg w$ используются для определения всех дробных степеней v и w . Поскольку v и w не могут обращаться в нуль на $(a, b)_{\rho}$ (условие (V)), то ветви задаются на \mathcal{P} однозначно; кроме того, $\arg v = \mu \arg w$ в любой точке \mathcal{P} . Из (6.03), (6.05) и условия (V) следует, что

$$|\theta + \arg v| < \pi/2 \quad (t \in (a, b)_{\rho}). \quad (6.06)$$

В соответствии с этим v меняется на простом римановом листе, когда t изменяется на \mathcal{P} .

Для малых значений $|t-a|$ условие (III) и формула бинома дают

$$w = p_0^{1/\mu} (t-a) \left\{ 1 + \frac{p_1}{\mu p_0} (t-a) + \dots \right\}.$$

Таким образом, w — однозначная голоморфная функция t в окрестности точки a , и производная dw/dt не равна нулю в a . Применение теоремы об обратной функции¹⁾ показывает, что для всех достаточно малых значений положительного числа ρ круг $|t - a| < \rho$ конформно отображается на область W , содержащую точку $w = 0$. Кроме того, если $w \in W$, то функцию $t - a$ можно разложить в сходящийся ряд

$$t - a = \sum_{s=1}^{\infty} c_s w^s = \sum_{s=1}^{\infty} c_s v^{s/\mu},$$

коэффициенты c_s которого выражаются через p_s ; сравните с формулой (8.05) главы 3.

Пусть k — конечная точка, отличная от a и принадлежащая замыканию (a, b) ; выберем ее так, чтобы она не зависела от z и чтобы круг $|w| \leq |p(k) - p(a)|^{1/\mu}$ содержался в W . Тогда интервал $[a, k]_{\infty}$ можно деформировать таким образом, что его w -образ станет прямолинейным отрезком. Переход к переменной v дает

$$\int_a^k e^{-zp(t)} q(t) dt = e^{-zp(a)} \int_0^{\kappa} e^{-zv} f(v) dv, \quad (6.07)$$

где

$$\kappa = p(k) - p(a), \quad f(v) = q(t) \frac{dt}{dv} = \frac{q(t)}{p'(t)}, \quad (6.08)$$

а путь интегрирования в правой части (6.07) является прямолинейным отрезком.

При малых $|v|$ функция $f(v)$ разлагается в сходящийся ряд вида

$$f(v) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s v^{(s+\lambda-\mu)/\mu}, \quad (6.09)$$

в котором коэффициенты a_s связаны с p_s и q , точно так же, как в главе 3, § 8.1; например, $a_0 = q_0/(\mu p_0^{\lambda/\mu})$.

6.3. Как и в случае действительной переменной, мы определим функции $f_n(v)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, соотношениями $f_n(0) = a_n$ и

$$f(v) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s v^{(s+\lambda-\mu)/\mu} + v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v) \quad (v \neq 0). \quad (6.10)$$

Тогда $f_n(v)$ имеет порядок $O(1)$ при $v \rightarrow 0$. Интеграл в правой

¹⁾ См., например, Левинсон и Редхеффер (1970, стр. 301) или Копсон (1935, § 6.22).

части (6.07) можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} e^{-zv} f(v) dv = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} - \varepsilon_{n,1}(z) + \varepsilon_{n,2}(z), \quad (6.11)$$

где

$$\varepsilon_{n,1}(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}, \kappa z\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}}, \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_{n,2}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zv} v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v) dv. \quad (6.13)$$

Поскольку $|\theta + \arg \kappa| < \frac{\pi}{2}$ (ср. (6.06)), ветвь $z^{(s+\lambda)/\mu}$ в (6.11) и (6.12) имеет вид $\exp\{(s+\lambda)(\ln|z| + i\theta)/\mu\}$, а каждая неполная гамма-функция в (6.12) принимает главное значение.

Применение формулы (2.02) показывает, что

$$\varepsilon_{n,1}(z) = O(e^{-\kappa z}/z), \quad (|z| \rightarrow \infty), \quad (6.14)$$

равномерно относительно θ .

Для $\varepsilon_{n,2}(z)$ подстановка $v = \kappa \tau$ дает

$$\varepsilon_{n,2}(z) = \int_0^1 e^{-z\kappa\tau} \tau^{(n+\lambda-\mu)/\mu} O(1) d\tau.$$

В силу условия (V) и того, что θ содержится в замкнутом интервале, мы имеем

$$\operatorname{Re}(z\kappa) = |z| \operatorname{Re}\{e^{i\theta} p(\kappa) - e^{i\theta} p(a)\} \geq |z| \eta_k, \quad (6.15)$$

где числа η_k не зависят от z и положительны. Поэтому

$$\varepsilon_{n,2}(z) = O(z^{-(n+\operatorname{Re} \lambda)/\mu}) = O(z^{-(n+\lambda)/\mu})$$

равномерно относительно θ .

Объединение результатов этого пункта с (6.07) приводит к разложению

$$\int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt = e^{-zp(a)} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} + O\left(\frac{1}{z^{(n+\lambda)/\mu}}\right) \right\}, \quad (6.16)$$

справедливому равномерно относительно θ при $|z| \rightarrow \infty$.

6.4. Теперь мы рассмотрим оставшуюся часть интеграла, т. е. вклад от интервала $(k, b)_{\mathcal{P}}$. Из условия (V) следует, что

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a)\} \geq \eta > 0 \quad (t \in [k, b]_{\mathcal{P}}), \quad (6.17)$$

где η не зависит от θ . В соответствии с этим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{zp(t) - zp(a)\} &= \{(|z| - Z) + Z\} \operatorname{Re} \{e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a)\} \geqslant \\ &\geqslant (|z| - Z) \eta + \operatorname{Re} \{Ze^{i\theta} p(t)\} - \operatorname{Re} \{Ze^{i\theta} p(a)\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt \right| &\leqslant |e^{-zp(a)}| e^{(Z-|z|)\eta} \exp \{Ze^{i\theta} p(a)\} \times \\ &\times \int_a^b |\exp \{-Ze^{i\theta} p(t)\} q(t)| dt. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Условие (IV) показывает, что последняя величина имеет порядок $e^{-zp(a)} O(e^{-|z|\eta})$ равномерно относительно θ . Поэтому асимптотическое разложение (6.16) не меняется при учете интеграла по $(k, b)_\infty$.

6.5. Мы установили следующий фундаментальный результат: Теорема 6.1. В предположениях § 6.1

$$\int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt \sim e^{-zp(a)} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (6.19)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$. Коэффициенты a_s определяются методом § 6.2, а ветвь $z^{(s+\lambda)/\mu}$ задается условием $\exp\{(s+\lambda)(\ln|z| + i\theta)/\mu\}$.

Как и в случае действительных переменных, следует отметить, что наиболее важные результаты леммы Ватсона (теорема 3.2) являются частным случаем сформулированной теоремы.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Пусть \mathcal{L} обозначает прямолинейный отрезок, соединяющий точки $t=0$ и $t=\pi(1+i)$, функция $(1+t)^{ix}$ принимает главное значение, переменная x положительна и возрастает. Показать, что

$$\int_{\mathcal{L}} (1+t)^{ix} \exp(ixe^t) dt = e^{ix} \left\{ \frac{i}{2x} + \frac{3i}{16x^3} + \frac{5}{32x^4} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \right\}.$$

6.2. Пусть \mathcal{S} обозначает полуокружность в верхней полуплоскости переменной t , начинающуюся в точке $t=1$ и кончающуюся в $t=-1$. Показать, что

$$\int_{\mathcal{S}} e^{z(t-\ln t)} dt = e^z \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{i}{z^{1/2}} - \frac{2}{3z} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{i}{12z^{3/2}} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $-(\pi/2) + \delta \leqslant \arg z \leqslant \arctg(2/\pi) - \delta$, где δ — произвольно малое положительное число, а $\ln t$ и степени z принимают главные значения.

§ 7. Точки перевала

7.1. Рассмотрим теперь интеграл

$$I(z) = \int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt \quad (7.01)$$

в случае, когда минимальное значение функции $\operatorname{Re}\{zp(t)\}$ на пути интегрирования достигается во внутренней точке t_0 . Предположим для простоты, что величина $\theta (\equiv \arg z)$ фиксирована, так что t_0 не зависит от z .

Разбивая путь точкой t_0 на две части, получаем

$$I(z) = \int_a^{t_0} e^{-zp(t)} q(t) dt - \int_{t_0}^b e^{-zp(t)} q(t) dt. \quad (7.02)$$

Предположим, что в окрестности t_0 функции $p(t)$ и $q(t)$ имеют разложения в ряды Тейлора вида

$$p(t) = p(t_0) + (t - t_0) p'(t_0) + (t - t_0)^2 \frac{p''(t_0)}{2!} + \dots, \quad (7.03)$$

$$q(t) = q(t_0) + (t - t_0) q'(t_0) + (t - t_0)^2 \frac{q''(t_0)}{2!} + \dots \quad (7.04)$$

Для больших $|z|$ асимптотическое разложение каждого из интегралов в правой части (7.02) можно получить, применив теорему 6.1, причем роль рядов, указанных в условии (III) § 6.1, будут играть ряды (7.03) и (7.04). Однако если $p'(t_0) \neq 0$, то условие минимальности $\operatorname{Re}\{e^{i\theta} p(t)\}$ в точке t_0 дает $\cos(\omega_0 + \theta + \omega) = 0$, где снова $\omega_0 = \arg\{p'(t_0)\}$, а ω — угол наклона пути в точке t_0 . Поскольку два значения ω отличаются на π , величина $\omega_0 + \theta + \omega$ равна $\pi/2$ для одного интеграла и $-\pi/2$ для другого; ср. (6.03). Значения ω_0 и коэффициентов a , одни и те же в обоих случаях. Поэтому асимптотические разложения интегралов одинаковы, и все, что остается после подстановки в (7.02), — это остаточный член $O\{z^{-n} e^{-zp(t_0)}\}$, где n — произвольное положительное число. (Эта ситуация не имеет аналога в случае действительных переменных: когда функция $p(t)$ действительна и непрерывно дифференцируема, она не может достигать во внутренней точке минимума, если не выполняется условие $p'(t_0) = 0$.)

С другой стороны, если $p'(t_0) = 0$, то параметр μ в условии (III) § 6.1 равен целому числу, такому, что $\mu \geq 2$. Таким образом, $\mu\omega$ отличается для двух интегралов на $\mu\pi$, и поэтому значения ω_0 , удовлетворяющие (6.03), отличаются друг от друга на $\mu\pi$, если μ — четное число, или на $(\mu \pm 1)\pi$, если μ — нечетное число. Следовательно, для определения коэффициентов a , исполь-

вуются различные ветви $p_0^{1/\mu}$, и асимптотические разложения более не приводят к сокращениям при подстановке в (7.02).

7.2. Последние рассуждения дают ключ к тому, как поступать в случае $p'(t_0) \neq 0$. Мы должны попытаться так деформировать путь интегрирования, чтобы минимум функции $\operatorname{Re}\{e^{ip(t)}\}$ достигался или в одной из конечных точек, или в точке, где $p'(t)$ обращается в нуль. Если это удастся, то мы найдем асимптотическое разложение, применив один или два раза теорему 6.1.

Таким образом, точки, в которых $p'(t_0) = 0$, имеют важное значение. Они называются *точками перевала* (*седловыми точками*). Задача отыскания точек перевала в общем случае достаточно проста, однако построение пути интегрирования, на котором $\operatorname{Re}\{e^{ip(t)}\}$ достигает минимума в концевой точке или в точке перевала, может вызвать затруднения. Иногда помогает простая догадка, особенно когда параметр z — действительный. В противном случае может оказаться необходимым провести подробное изучение конформного отображения между плоскостями t и v , где $v = p(t) - p(a)$ и a — концевая точка или точка перевала. Как только образ V первоначальной области T построен, легко проверить, можно ли соединить точку $p(b) - p(a)$ с началом координат контуром \mathcal{Q} , целиком лежащим в пересечении V с сектором $|\arg(e^{iv})| < \pi/2$. Допустимым путем \mathcal{P} служит t образ \mathcal{Q} , но его фактическое расположение находить не обязательно: доказательство существования является достаточным для применимости теоремы 6.1.

Если a — точка перевала порядка $\mu - 1$, т. е. если

$$p'(a) = p''(a) = \dots = p^{(\mu-1)}(a) = 0, \quad p^{(\mu)}(a) \neq 0,$$

то окрестность a отображается на μ римановых листов. Однако полную окрестность точки a можно не рассматривать, поскольку путь \mathcal{Q} лежит на половине листа.

7.3. Чаще всего на практике встречаются интегралы вида (7.01) с простой точкой перевала, т. е. с точкой перевала порядка 1, во внутренней точке t_0 пути интегрирования. Поскольку в этом случае происходит некоторое упрощение, мы можем дать полную формулировку результата, получающегося при объединении вкладов от $(t_0, b)_{\mathcal{P}}$ и $(a, t_0)_{\mathcal{P}}$.

Предположения:

(I) Функции $p(t)$ и $q(t)$ не зависят от z , однозначны и голоморфны в некоторой области T .

(II) Путь интегрирования \mathcal{P} не зависит от z . Концевые точки a и b пути \mathcal{P} конечны или бесконечны, и интервал $(a, b)_{\mathcal{P}}$ лежит внутри T .

(III) Производная $p'(t)$ имеет простой нуль во внутренней точке t_0 пути \mathcal{P} .

(IV) Параметр z изменяется вдоль луча или в секторе, удовлетворяющем условиям $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и $|z| \geq Z$, где $\theta \equiv \arg z$, $\theta_2 - \theta_1 < \pi$ и $Z > 0$. Интеграл $I(z)$ сходится в точках a и b абсолютно и равномерно относительно z .

(V) Величина $\operatorname{Re}\{e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(t_0)\}$ положительна на $(a, b) \setminus \varphi$, исключая точку t_0 , и ограничена от нуля равномерно относительно θ , когда $t \rightarrow a$ или b вдоль \mathcal{P} .

Теорема 7.1. При указанных предположениях

$$\int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt \sim 2e^{-zp(t_0)} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{a_{2s}}{z^{s+1/2}} \quad (7.05)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$.

Формулы для первых двух коэффициентов имеют вид

$$a_0 = \frac{q}{(2p'')^{1/2}}, \quad a_2 = \left\{ 2q'' - \frac{2p'''q'}{p''} + \left(\frac{5p''''^2}{6p''^2} - \frac{p^{(4)}}{2p''} \right) q \right\} \frac{1}{(2p'')^{3/2}}, \quad (7.06)$$

где p , q и их производные вычисляются в точке $t = t_0$. При вычислении $(2p'')^{1/2}$ и $(2p'')^{3/2}$ используется ветвь, для которой величина $\omega_0 \equiv \arg\{p''(t_0)\}$ удовлетворяет неравенству

$$|\omega_0 + \theta + 2\omega| \leq \pi/2,$$

где ω — предельное значение $\arg(t - t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ вдоль $(t_0, b) \setminus \varphi$.

§ 8. Примеры

8.1. Интеграл Шлефли для полинома Лежандра степени n был определен формулой (7.19) в главе 2. Его можно привести к виду

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{-np(t)} q(t) dt,$$

где \mathcal{C} — простой замкнутый контур, окружающий точку $t = \cos \alpha$, и

$$p(t) = \ln \left(\frac{t - \cos \alpha}{t^2 - 1} \right), \quad q(t) = \frac{1}{t - \cos \alpha},$$

причем ветвь логарифма действительна при $t \in (1, \infty)$. Мы хотим найти асимптотическое приближение для $P_n(\cos \alpha)$, когда n велико, а α — фиксированная точка из интервала $(0, \pi)$. Поскольку

$$p'(t) = -\frac{t^2 - 2t \cos \alpha + 1}{(t^2 - 1)(t - \cos \alpha)},$$

точки перевала совпадают с точками $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$. В соответствии с § 7.2 мы деформируем \mathcal{C} так, чтобы он проходил через эти точки. Одним из возможных результатов является единичная окружность (рис. 8.1). Так как функция $p(t)$ действительна на части действительной оси, она принимает сопряженные значения при сопряженных значениях t^1). То же самое справедливо относительно $q(t)$. Следовательно,

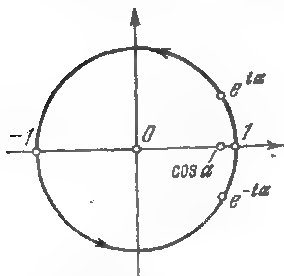


Рис. 8.1. Путь интегрирования для $P_n(\cos \alpha)$.

$$P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2^n \pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\mathcal{C}} e^{-np(t)} q(t) dt \right\},$$

где \mathcal{C} — полуокружность в верхней полуплоскости, соединяющая точки 1 и -1.

Точка перевала при $t = e^{i\alpha}$ — простая, и поэтому можно применять теорему 7.1. Полагая $t = e^{i\tau}$, мы находим, что

$$\operatorname{Re} \{p(t) - p(e^{i\alpha})\} =$$

$$= \ln \left| \frac{e^{i\tau} - \cos \alpha}{e^{2i\tau} - 1} \right| + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{\cos \tau - \cos \alpha}{\sin \tau} \right)^2 \right\}.$$

Эта величина положительна в интервале $0 < \tau < \pi$ всюду, исключая точку $\tau = \alpha$. Поскольку в данном случае $\theta = 0$, то главное условие (V) выполнено. Остальные условия (I) — (IV) также удовлетворяются. Замечая, что $p(e^{i\alpha}) = -\ln 2 - i\alpha^2$, мы получаем

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-np(t)} q(t) dt \sim 2^{n+1} e^{i n \alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{a_{2s}}{n^{s+1/2}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Чтобы вычислить a_0 , напомним

$$p''(e^{i\alpha}) = i e^{-i\alpha} \operatorname{cosec} \alpha, \quad q(e^{i\alpha}) = -i \operatorname{cosec} \alpha.$$

При $\omega = (\pi/2) + \alpha$ мы выбираем

$$\omega_0 \equiv \arg \{p''(e^{i\alpha})\} = -\alpha - (3\pi/2).$$

(ср. (7.07) при $\theta = 0$). Поэтому первая из формул (7.06) дает

$$a_0 = (2 \sin \alpha)^{-1/2} e^{(2\alpha + \pi)/4}.$$

¹⁾ Это следствие принципа симметрии Шварца; см., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука», 1968, гл. 8, § 7.

²⁾ Выбор ветви логарифма является несущественным.

Следовательно, первое приближение имеет вид

$$P_n(\cos \alpha) = \left(\frac{2}{\pi n \sin \alpha} \right)^{1/2} \sin \left(n\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (8.01)$$

Значение a_2 можно вычислить по второй формуле (7.06), а коэффициенты более высокого порядка находятся общим методом § 6.2.

8.2. В качестве второго примера рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t^{2x}} dt, \quad (8.02)$$

в котором x — положительно и велико, путь интегрирования проходит выше начала координат, а функция t^{2x} непрерывна и принимает главное значение при $t \rightarrow +\infty$.

Естественный выбор $p(t) = 2 \ln t$, $q(t) = \exp(-t^2)$ не дает точки перевала. Вспоминая метод § 7.5 главы 3, мы вместо нее будем искать точки, в которых обращается в нуль производная *всего* подынтегрального выражения. Для них получается уравнение

$$2t \exp(-t^2) t^{-2x} + 2x \exp(-t^2) t^{-2x-1} = 0$$

с корнями $t = \pm i\sqrt{x}$. Поскольку наша теория применима только в случае, когда точка перевала не зависит от параметра x , мы заменим переменную интегрирования t на t/\sqrt{x} и получим

$$I(x) = \frac{1}{x^{x-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x p(t)} dt, \quad (8.03)$$

где

$$p(t) = t^2 + 2 \ln t. \quad (8.04)$$

Новые точки перевала находятся в $t = \pm i$; обе они — простые. В качестве возможного пути интегрирования рассмотрим прямую линию, проходящую через точку $t = i$ параллельно действительной оси, причем соответствующая деформация при $t = \pm \infty$ справедлива в силу теоремы Коши. Полагая $t = i + \tau$ и замечая, что на новом пути логарифм в (8.04) имеет главное значение, мы получаем

$$p(t) = -1 + 2i\tau + \tau^2 + 2 \ln i + 2 \ln(1 - i\tau),$$

откуда

$$\operatorname{Re}\{p(t)\} = -1 + \tau^2 + \ln(1 + t^2).$$

Эта величина достигает минимума при $\tau = 0$; следовательно, условие (V) из § 7.3 удовлетворено, так же как и остальные четыре условия. В обозначениях § 7.3 имеем

$$t_0 = i, \quad p(i) = -1 + i\pi, \quad p''(i) = 4, \quad p'''(i) = 4i, \quad p^{(4)}(i) = -12.$$

Формулы (7.06) дают $a_0 = 1/2\sqrt{2}$ и $a_2 = 1/24\sqrt{2}$; применяя к (8.03) теорему 7.1, получаем искомым результат:

$$I(x) \sim e^{-x\pi i} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{e}{x} \right)^x \left(1 + \frac{1}{24x} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Этот результат можно проверить, воспользовавшись разложением (8.16) главы 3: выбирая $-t^2$ в качестве новой переменной интегрирования в (8.02) и используя интеграл Ганкеля по петле (глава 2, формула (4.12)), мы найдем, что

$$I(x) = \frac{\pi e^{-x\pi i}}{\Gamma(x + 1/2)}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Получить результат упражнения 7.1 из главы 3 методом § 8.1, используя в качестве пути интегрирования окружность, имеющую диаметром отрезок $[e^{-\alpha}, e^{\alpha}]$.

8.2. Пусть $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2xt^3 - \frac{4x}{t}\right) dt$, где параметр x положителен,

а путь интегрирования проходит выше начала координат. Используя путь, состоящий из частей действительной оси, лежащих вне единичной окружности, вместе с верхней половиной этой окружности, показать, что

$$f(x) = \pi^{1/2} (6x)^{-1/2} e^{3ix\sqrt[3]{3}} \{1 + O(x^{-1})\} \quad (x \rightarrow \infty) \quad [\text{Ловерье, 1966}].$$

8.3. Доказать, что если путь интегрирования проходит по мнимой оси, а подынтегральное выражение принимает главное значение, то для больших положительных x

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} t^{1/2} \exp(-xt^2) dt \sim i\pi^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}e^{2\pi i}\right)$$

с относительной ошибкой $O(e^{-2x})$.

8.4. В интеграле

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z(t^3 - 2it)) \operatorname{cosech}(1 + t^2) dt$$

точка перевала $t = i$ совпадает с полюсом подынтегрального выражения. Вычитая сингулярную часть (§ 5.2), показать, что

$$I(z) = e^{-z} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^{1/2}}{4z^{1/2}} - \frac{11}{96} \frac{\pi^{1/2}}{z^{3/2}} + O\left(\frac{1}{z^{5/2}}\right) \right\}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| < (\pi/2) - \delta$ ($\delta < \pi/2$). Является ли эта область справедливости разложения максимальной?

§ 9. Функции Бесселя при больших значениях аргумента и порядка

9.1. В этом параграфе теория, развитая в §§ 6 и 7, применяется к выводу двух важных разложений для функции Бесселя $J_\nu(z)$. В качестве отправного пункта мы выберем контурный интеграл (9.13) из главы 2. Заменяя в нем t на $-t$, получаем

$$J_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-\pi i}^{-\infty-\pi i} e^{-zsh t + \nu t} dt \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.01)$$

Предположим сначала, что ν и z — действительные или комплексные числа, причем ν фиксировано, а значение $|z|$ велико. Точки перевала находятся в нулях функции $\operatorname{ch} t$, т. е. в точках $t = \pm \pi i/2, \pm 3\pi i/2, \dots$ Путь интегрирования можно деформировать так, чтобы он проходил через любое число этих точек, но не очевидно, как выбрать путь, на котором функция $\operatorname{Re}(zsh t)$ достигает минимума в одной или более точках перевала. Поэтому мы воспользуемся соображениями § 7.2 и будем отображать полосу

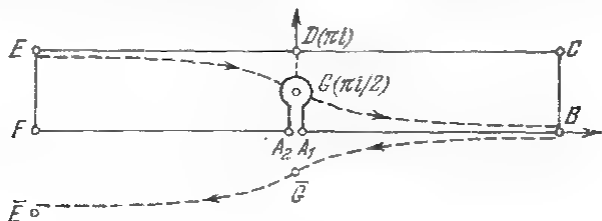


Рис. 9.1. t плоскость.

$0 < \operatorname{Im} t < \pi$ (которая содержит одну из точек перевала) на плоскость переменной $v = sh t - i$. Отображение характеризуется следующими свойствами:

- Положительная действительная полуось t переходит в прямой отрезок $\operatorname{Im} v = -1, \operatorname{Re} v \geq 0$.
- $v \sim e^t/2$ при $\operatorname{Re} t \rightarrow +\infty$.
- Увеличение t на πi меняет знак v .
- Производная $\frac{dv}{dt}$ действительна на мнимой оси и меняет

знак при $t = \frac{1}{2} \pi i$.

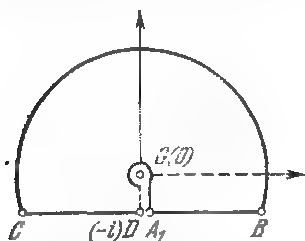
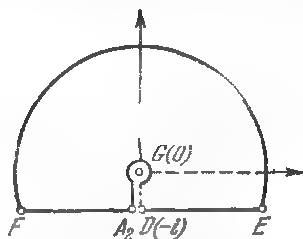
- $v \sim \frac{1}{2} i \left(t - \frac{1}{2} \pi i\right)^2$ при $t \rightarrow \frac{1}{2} \pi i$.

- Картинки на мнимых осях совпадают.

Соответствующие точки в обеих плоскостях изображены на рис. 9.1—9.3. Образ в v -плоскости состоит из двух листов, причем

переход от рис. 9.2 к 9.3 происходит через пунктирный прямолинейный отрезок DG .

Положительные действительные полюсы (рис. 9.2 и 9.3) отображаются на кривые GB и GE , изображенные на рис. 9.1. В качестве возможного пути интегрирования для интеграла (9.01) мы возьмем всю кривую EGB вместе с сопряженной кривой $B\bar{G}\bar{E}$

Рис. 9.2. v -плоскость 1).Рис. 9.3. v -плоскость 2).

(также указанной на рис. 9.1). Очевидно, что $\operatorname{Re} v$ достигает минимума на кривой EGB в точке G . Если δ — произвольное достаточно малое положительное число и величина $\theta \equiv \arg z$ ограничена условием $|\theta| \leq (\pi/2) - \delta$, то выполнено условие (V) из § 7.3. Легко видеть, что остальные четыре условия также удовлетворены, и теорема 7.1 приводит к разложению

$$\int_{-\infty - \pi i}^{\infty} e^{-zsh t + vt} dt \sim 2e^{-iz} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{a_{2s}}{z^{s+1/2}} \quad (9.02)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$.

9.2. Следующая задача состоит в вычислении коэффициентов a_{2s} . Она сводится к упражнению по теории тригонометрических рядов. Из формул (6.08) и (6.09), где $\lambda=1$ и $\mu=2$, мы имеем

$$\frac{e^{vt}}{\operatorname{ch} t} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s v^{(s-1)/2}. \quad (9.03)$$

Положим $t = (\pi i/2) + \tau$, так что $v = 2i \operatorname{sh}^2(\tau/2)$. Неравенство (7.07) выполняется при $\omega = -\pi/4$, $\omega_0 = \pi/2$ и $|\arg z| < \pi/2$; следовательно, равенство $\arg \tau = 0$ соответствует условию $\arg v = \pi/2$. Поэтому правильный выбор ветвей в (9.03) приводит к соотношению

$$\frac{e^{(2v-1)\pi i/4} e^{v\tau}}{2^{1/2} \operatorname{ch}(\tau/2)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s e^{s\pi i/4} 2^{s/2} \left(\operatorname{sh} \frac{\tau}{2}\right)^s.$$

Так как нам нужны лишь коэффициенты a_s с четными индексами, мы заменим τ на $-\tau$ и рассмотрим среднее двух разложений;

тогда

$$\frac{e^{(2\nu-1)\pi i/4} \operatorname{ch} \nu \tau}{2^{1/2} \operatorname{ch}(\tau/2)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} (2i)^s \left(\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} \right)^{2s}. \quad (9.04)$$

Если обозначить $\operatorname{sh}(\pi/2)$ через y , а левую часть (9.04) через $F(y)$, то по теореме Тейлора

$$a_{2s} = \frac{F^{(2s)}(0)}{(2i)^s (2s)!}. \quad (9.05)$$

Непосредственное дифференцирование показывает, что

$$(1+y^2)F''(y) + 3yF'(y) + (1-4\nu^2)F(y) = 0.$$

Дифференцируя это уравнение $2s-2$ раза с помощью теоремы Лейбница и полагая $y = 0$, мы находим, что

$$F^{(2s)}(0) = \{4\nu^2 - (2s-1)^2\} F^{(2s-2)}(0). \quad (9.06)$$

Значение a_0 можно получить, положив $\tau = 0$ в (9.04). Далее, используя (9.05) и (9.06), мы приходим к искомому общему выражению

$$a_{2s} = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots \{4\nu^2 - (2s-1)^2\}}{(2s)! (2i)^s} \frac{e^{(2\nu-1)\pi i/4}}{2^{1/2}}.$$

Возвращаясь к (9.02) и используя формулу удвоения для гамма-функции, мы находим, что

$$\int_{-\infty+\pi i}^{\infty} e^{-zsh + \nu t} dt \sim \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} \exp\left\{i\left(\frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4} - z\right)\right\} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s(\nu)}{(iz)^s}, \quad (9.07)$$

где

$$A_s(\nu) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots \{4\nu^2 - (2s-1)^2\}}{s! 8^s}. \quad (9.08)$$

Соответствующее разложение для интеграла вдоль пути, идущего от $-\infty - \pi i$ к ∞ , получается из (9.07) при изменении знака перед i . Подставляя эти результаты в (9.01), мы получаем искомое асимптотическое разложение, причем в составном виде

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s}(\nu)}{z^{2s}} - \right. \\ \left. - \sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s+1}(\nu)}{z^{2s+1}} \right] \quad (9.09)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta (< \pi/2)$. Это разложение получено Ганкелем (1869).

9.3. Область справедливости разложения (9.09) можно расширить, взяв новые пути интегрирования, как в § 1.2 и в доказательстве теоремы 3.3. Используя теорему Коши, можно деформировать путь EGB на рис. 9.1 до совпадения с путем, образом которого является луч $\arg v = -\beta$, в предположении, что $\beta \in (-3\pi/2, \pi/2)$. Последнее условие необходимо в связи с тем, что t как функция переменной v имеет особенности на лучах $\arg v = 3\pi/2$ и $\arg v = -\pi/2$. Для каждого допустимого β интеграл вдоль нового пути является аналитическим продолжением в сектор $|\arg ze^{-i\beta}| < \pi/2$ интеграла, стоящего в левой части (9.07).

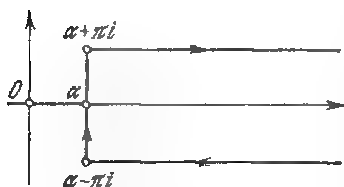


Рис. 9.4. Путь интегрирования для $J_\nu(v/\operatorname{ch} \alpha)$.

На новом пути условия § 7.3 выполняются, если предположить, что $\theta \in [-(\pi/2) + \beta + \delta, (\pi/2) + \beta - \delta]$. Следовательно, правая часть (9.07) дает асимптотическое разложение аналитического продолжения интеграла, стоящего в левой части, при условии $-2\pi + \delta \leq \arg z < \pi - \delta$.

Соответствующее расширение области справедливости разложения для интеграла вдоль пути $B\bar{G}\bar{E}$ дается неравенством $-\pi + \delta \leq \arg z < 2\pi - \delta$. Поэтому асимптотическое разложение (9.09) справедливо в пересечении указанных секторов, т. е. в области $|\arg z| \leq \pi - \delta$.

9.4. Теперь мы рассмотрим функцию $J_\nu(z)$ в случае, когда $z = v \operatorname{sech} \alpha$, где α и v — действительные положительные числа, причем α фиксировано, а v велико. Меняя знак в (9.01), имеем

$$J_\nu(v \operatorname{sech} \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{-vp(t)} dt,$$

где

$$p(t) = t - \operatorname{sech} \alpha \operatorname{sh} t. \quad (9.10)$$

Точками перевала являются теперь корни уравнения $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} \alpha$, которые имеют вид $t = \pm \alpha, \pm \alpha \pm 2\pi i, \pm \alpha \pm 4\pi i, \dots$ Наиболее удобной точкой является α ; в качестве возможного пути интегрирования мы рассмотрим тот, который изображен на рис. 9.4. На вертикальном отрезке $t = \alpha + i\tau$, $-\pi \leq \tau \leq \pi$, имеем

$$\operatorname{Re} \{p(t)\} = \alpha - \operatorname{th} \alpha \cos \tau > \alpha - \operatorname{th} \alpha \quad (\tau \neq 0).$$

На горизонтальных частях $t = \alpha \pm \pi i + \tau$, $0 \leq \tau < \infty$, имеем

$$\operatorname{Re} \{p(t)\} = \alpha + \tau + \operatorname{sech} \alpha \operatorname{sh} (\alpha + \tau) \geq \alpha + \operatorname{th} \alpha.$$

Поэтому $\operatorname{Re} \{p(t)\}$ достигает минимума на пути интегрирования

в точке α , так что выполняется условие (V) из § 7.3. Остальные четыре условия также выполнены, и, применяя теорему 7.1, мы получаем

$$J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \sim \frac{e^{-\nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha)}}{\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{a_{2s}}{\nu^{s+1/2}} \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

В отличие от (9.09), явного общего выражения для коэффициентов нет. Однако первые два члена легко найти из (7.06). Дифференцирование выражения (9.10) дает

$$p''(\alpha) = p^{(4)}(\alpha) = -\operatorname{th} \alpha, \quad p'''(\alpha) = -1.$$

Поскольку $\omega = \pi/2$, правильный выбор ветвей для степеней $p''(\alpha)$ определяется условием $\arg \{p''(\alpha)\} = -\pi$. Следовательно,

$$a_0 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} \alpha\right)^{1/2} i, \quad a_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \operatorname{ctg}^2 \alpha\right) \left(\frac{1}{2} \operatorname{cth} \alpha\right)^{3/2} i$$

и

$$J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha) \sim$$

$$\sim \frac{e^{-\nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha)}}{(2\pi\nu \operatorname{th} \alpha)^{1/2}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{8} \operatorname{cth} \alpha - \frac{5}{24} \operatorname{cth}^3 \alpha\right) \frac{1}{\nu} + \dots \right\}. \quad (9.11)$$

Это разложение получено Дебаем (1909). Члены более высокого порядка даны, например, в Б. А. (1952); их легче получить из теории дифференциальных уравнений, чем предыдущим методом.

9.5. В рассуждениях § 9.4 можно было избежать рассмотрения конформного отображения, поскольку легко было догадаться, какой путь подходит. Однако, когда ν или α комплексны, избежать конформного отображения невозможно; сравните следующее упражнение.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Построить отображение полулопасты $0 < \operatorname{Im} t < 2\pi$, $\operatorname{Re} t > 0$ в плоскость переменной

$$t - \operatorname{sech} \alpha \operatorname{sh} t - \alpha + \operatorname{th} \alpha,$$

где α — фиксированное положительное число. Показать, что разложение (9.11) справедливо при $|\arg \nu| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$).

9.2. Используя теорему 6.1, доказать, что

$$J_\nu(\nu) \sim 2^{1/2} / \{3^{1/2} \Gamma(2/3) \nu^{1/6}\}$$

при больших $|\nu|$ в секторе $|\arg \nu| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$).

9.3. Показать, что если α — фиксированное число из интервала $(0, \pi/2)$, а ν — большое положительное число, то

$$\int_0^\infty \exp(-\nu \operatorname{sech} \alpha \operatorname{ch} t) \cos \nu t dt = \left(\frac{\pi}{2\nu \operatorname{th} \alpha}\right)^{1/2} \exp\left\{\nu\left(\alpha - \operatorname{th} \alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}.$$

§ 10*. Оценки остаточного члена для метода Лапласа; метод наискорейшего спуска

10.1. Используя обозначения § 6, предположим на время, что путь интегрирования \mathcal{P} можно деформировать так, что его v -образ будет целиком проходить по действительной оси, и, таким образом,

$$\operatorname{Im} \{p(t)\} = \operatorname{const} = \operatorname{Im} \{p(a)\}. \quad (10.01)$$

Перейдя к переменной интегрирования v в первоначальном интеграле (6.01), мы можем разбить его, как и в § 6, на три части:

$$\int_a^b e^{-zp(t)} q(t) dt = \\ = e^{-zp(a)} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right) \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} - \varepsilon_{n,1}(z) + \varepsilon_{n,2}(z) \right\}, \quad (10.02)$$

где

$$\varepsilon_{n,1}(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma\left\{\frac{s+\lambda}{\mu}, zp(t) - zp(a)\right\} \frac{a_s}{z^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (10.03)$$

и

$$\varepsilon_{n,2}(z) = \int_0^{p(b)-p(a)} e^{-zv} v^{(n+\lambda-\mu)/\mu} f_n(v) dv. \quad (10.04)$$

Мы ограничимся для простоты рассмотрением случая действительных λ . В (10.03) $|\arg \{zp(b) - zp(a)\}| < \pi/2$, и каждая неполная гамма-функция принимает главное значение. Из (2.02), (2.06) и (2.09) при $n = 0$ следует

$$|\Gamma(\alpha, \zeta)| \leq \frac{|\zeta - \zeta_0|}{|\zeta| - \alpha_0} \quad \left(|\arg \zeta| \leq \frac{\pi}{2}, |\zeta| > \alpha_0 \right),$$

где $\alpha_0 = \max(\alpha - 1, 0)$. Это неравенство обеспечивает подходящую оценку для $|\varepsilon_{n,1}(z)|$.

Для другого остаточного члена предположим, что $a_n \neq 0$ и

$$|f_n(v)| \leq |a_n| e^{\sigma_n v} \quad (0 \leq v < p(b) - p(a)).$$

Тогда

$$|\varepsilon_{n,2}(z)| \leq \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{|a_n|}{(|z| \cos \theta - \sigma_n)^{(n+\lambda)/\mu}} \cdot \\ \cdot \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}, |z| \cos \theta > \sigma_n \right). \quad (10.05)$$

В терминах первоначальных переменных наилучшее значение σ_n

дается выражением

$$\sigma_n = \sup_{t \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{|p(t) - p(a)|} \ln \left| \frac{\{q(t)/p'(t)\} - \sum a_s \{p(t) - p(a)\}^{(s+\lambda-\mu)/\mu}}{a_n \{p(t) - p(a)\}^{(n+\lambda-\mu)/\mu}} \right| \right], \quad (10.06)$$

где суммирование производится от $s = 0$ до $s = n-1$.

В более общем случае мы предположим, что β — произвольное действительное число, v -образ пути \mathcal{P} идет по лучу $\arg v = -\beta$ и $|\arg(ze^{-i\beta})| < \pi/2$. Тогда снова можно использовать (10.03), где берется главное значение для каждой неполной гамма-функции. Однако вместо (10.05) мы имеем

$$|e_{n,2}(z)| \leq \Gamma\left(\frac{n+\lambda}{\mu}\right) \frac{|a_n|}{\{|z| \cos(\theta - \beta) - \sigma_n\}^{(n+\lambda, \mu)}} \left(|\theta - \beta| < \frac{\pi}{2}, \quad |z| \cos(\theta - \beta) > \sigma_n \right). \quad (10.07)$$

Здесь величина σ_n определяется формулой (10.06) и в данном случае зависит от β . Случай, когда a_n обращается в нуль или σ_n бесконечна, можно рассмотреть, видоизменяя рассуждения, приведенные в § 9.1—9.3 главы 3 (см. также Д. С. Джоунс (1972)).

10.2. Предположим теперь, что точки a и b нельзя соединить контуром, уравнение которого имеет вид

$$\arg \{p(t) - p(a)\} = -\beta. \quad (10.08)$$

В этом случае мы будем двигаться от a вдоль пути типа (10.08), пока не достигнем выбранной подходящим образом точки k^1 . От k до точки b мы пойдём любым подходящим путем, лежащим в Γ и вдоль которого величина $\operatorname{Re} \{e^{i\theta} p(t) - e^{i\theta} p(a)\}$ положительна.

Интеграл по $(a, k)_{\mathcal{P}}$ имеет то же самое асимптотическое разложение, что и интеграл по $(a, b)_{\mathcal{P}}$, а его остаток можно оценить использованным выше методом.

Вклад от интеграла по $(k, b)_{\mathcal{P}}$ оценивается неравенством вида (6.18), где в качестве η можно взять наибольшее число, для которого справедливо условие (6.17). Поскольку выражение (6.18) экспоненциально мало по сравнению с оценкой для $|e^{-z p(a)} e_{n,2}(z)|$, то выбор k и пути от k до b не является существенным.

Пример, иллюстрирующий изложенные методы для получения оценок остаточных членов, был дан Олвером (1970, § 7).

10.3. Кривые, определяемые уравнением (10.01) или, в более общем случае, уравнением (10.08), имеют интересную геометри-

¹⁾ В § 6.2 показано, что это всегда возможно. Однако в данном контексте точка k не обязана удовлетворять условиям этого пункта.

ческую интерпретацию. Если точка a не является точкой перевала, то из теории конформного отображения следует, что в окрестности a уравнение (10.01) определяет регулярную дугу, проходящую через a (рис. 10.1 (1)). Если же a — точка перевала и $\mu-1$ — ее порядок (§ 7.2), то через a проходят μ регулярных дуг, на которых выполнено условие (10.01), и смежные дуги пересекаются под углом π/μ . Рисунки 10.1 (2) и 10.1 (3) иллюстрируют случаи $\mu = 2$ и $\mu = 3$ соответственно.

Рассмотрим поверхность $|e^{p(t)}|$ над плоскостью, в которой по осям откладываются действительная и мнимая части t . В силу

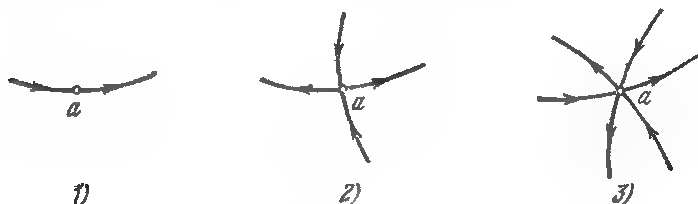


Рис. 10.1. t -плоскость: кривые уровня для $\text{Im}\{p(t)\}$. Стрелками указаны направления, в которых $\text{Re}\{p(t)\}$ возрастает. 1) $p'(a) \neq 0$; 2) Простой нуль $p(t)$ в точке a ; 3) Двойной нуль $p(t)$ в точке a .

теоремы о максимуме модуля на этой поверхности не может быть пиков или ям. Если $p'(a) = 0$, то касательная плоскость в точке a горизонтальна. Если, кроме того, $p''(a) \neq 0$, то поверхность в окрестности a имеет вид седла. Поэтому такие точки и называются *седловыми точками* или *точками перевала*. Деформация пути таким образом, чтобы он проходил через точку перевала, эквивалентна пересечению горной цепи через перевал.

Поверхность, на которой функция $\text{Im}\{p(t)\}$ постоянна, состоит из путей *наибыстрейшего спуска*. В этом можно убедиться следующим образом. Обозначим действительную и мнимую части функции $p(t)$ и через $p_R(t)$ и $p_I(t)$:

$$p(t) = p_R(t) + ip_I(t), \quad (10.09)$$

и пусть $t = t(\tau)$ — уравнение произвольного пути в t -плоскости, проходящего через a ; τ — дуговой параметр. Если $p_R(\tau) \equiv p_R\{t(\tau)\}$ и $p_I(\tau) \equiv p_I\{t(\tau)\}$, то

$$\frac{d}{d\tau} |e^{p(t)}| = \frac{d}{d\tau} e^{p_R(t)} = \dot{p}_R e^{i p_I(t)}.$$

При заданном t максимум или минимум этого выражения определяется максимумом или минимумом функции $\dot{p}_R(\tau)$. Дифференцирование равенства (10.09) дает $p'(t)t'(\tau) = \dot{p}_R(\tau) + i\dot{p}_I(\tau)$.

Поскольку $|i'(\tau)| = 1$, откуда следует, что

$$\{\rho_R'(\tau)\}^2 = |p'(t)|^2 - \{\rho_I'(\tau)\}^2.$$

Следовательно, $|\rho_R'(\tau)|$ достигает максимума, когда $\rho_I'(\tau) = 0$. Если последнее равенство выполняется всюду на пути, то функция $p_I(t)$ постоянна. Другими словами, справедливо равенство (10.01).

Следует еще раз подчеркнуть, что деформация первоначального пути до совпадения с путями, на которых функция $\text{Im}\{p(t)\}$ постоянна, не является существенным шагом при исследовании асимптотки интегралов вида (6.01). Как мы видели, достаточно, чтобы минимальное значение $\text{Re}\{e^{i\theta}p(t)\}$ достигалось или на конечной точке пути, или в точке перевала. Пути наибо́льшего спуска имеют важное значение потому, что они помогают найти максимальные области справедливости разложений в комплексной плоскости (ср. § 9.3) и построить явное выражение для оценок остаточных членов (§§ 10.1 и 10.2).

Исторические сведения и дополнительные ссылки

§ 2. Оценку остаточного члена для асимптотического разложения неполной гамма-функции можно также вывести в качестве частного случая из результатов, полученных Олвером (1965b) для функций Уиттекера (ср. главу 7, упр. 10.2 и равенство (11.03)).

§ 8.1. В изложении этого пункта мы следуем Сеге (1962, § 8.71) и Консо-ну (1966, § 37).

§ 10.3 Одним из оснований для использования путей наибо́льшего спуска является возможность облегчить применение леммы Ватсона; см., например, обсуждение этого вопроса у Урселла (1970). Этот подход был намечен в работе Римана (1863), опубликованной после его смерти, и получил дальнейшее развитие в исследованиях Дебая по теории бесселевых функций большого порядка (§ 9.4). В связи с трудностью точного построения путей наибо́льшего спуска многие авторы часто в приложениях рассматривали несколько иные пути. Эти видоизменения иногда называются методом перевала или седловой точки (де Брейн, 1961; Консон, 1966). Теорема 6.1, которая взята из работ Уаймена (1964) и Олвера (1970), объединяет и обобщает различные подходы.

Важно отметить, что вообще не обязательно использовать спускающиеся пути. Метод стационарной фазы (глава 3) фактически использует пути, вдоль которых постоянна функция $\{e^{p(t)}\}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ; ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

§ 1. Теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений: действительные переменные

1.1. В главе 2 было показано, что некоторые из введенных там специальных функций удовлетворяют дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + f(x) \frac{dw}{dx} + g(x)w = 0. \quad (1.01)$$

Другие важные специальные функции будут определены позднее как решения уравнений того же типа. На данном этапе мы изучим вопросы существования и свойства решений уравнения (1.01) в общем случае.

Хотя многие из последующих рассуждений непосредственно переносятся на общие однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка n вида

$$\frac{d^n w}{dx^n} + f_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} + \dots + f_0(x)w = 0,$$

ради простоты и имея в виду специальные функции, мы ограничимся большей частью случаем $n = 2$. Легко проверить, что в случае $n = 1$ общее решение дается формулой

$$w = \exp \left\{ - \int f_0(x) dx \right\}. \quad (1.02)$$

1.2. Теорема 1.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в конечном или бесконечном интервале (a, b) . Тогда дифференциальное уравнение (1.01) имеет бесконечное число решений, дважды дифференцируемых в (a, b) . Если значения w и $\frac{dw}{dx}$ заданы в некоторой точке, то решение единственно.

Эта теорема — хорошо известный результат теории дифференциальных уравнений. Однако мы приведем полное доказательство, поскольку аналогичные рассуждения будут использоваться в более сложных задачах.

Пусть a_0 и a_1 — произвольно заданные в точке $x = x_0$ значения w и $\frac{dw}{dx}$ соответственно. Построим последовательность функций $h_s(x)$, $s=0, 1, 2, \dots$, определенных соотношениями $h_0(x)=0$ и

$$h_s''(x) = -f(x)h_{s-1}'(x) - g(x)h_{s-1}(x), \quad h_s'(x_0)=a_0, \quad h_s(x_0)=a_1 \quad (1.03)$$

при $s \geq 1$. Таким образом, например,

$$h_1'(x) = a_1, \quad h_1(x) = a_1(x - x_0) + a_0. \quad (1.04)$$

Доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать, что при $s \rightarrow \infty$ предел последовательности существует, дважды дифференцируем и удовлетворяет уравнению (1.01).

Интегрирование уравнений (1.03) по x дает

$$h_s'(x) = - \int_{x_0}^x \{f(t)h_{s-1}'(t) + g(t)h_{s-1}(t)\} dt + a_1. \quad (1.05)$$

Интегрируя еще раз и используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$h_s(x) = - \int_{x_0}^x (x-t) \{f(t)h_{s-1}'(t) + g(t)h_{s-1}(t)\} dt + a_1(x - x_0) + a_0. \quad (1.06)$$

Если $s \geq 1$, то из (1.05) и (1.06) можно вывести, что

$$\begin{aligned} h_{s+1}'(x) - h_s'(x) &= - \int_{x_0}^x \{f(t)[h_s'(t) - h_{s-1}'(t)] + \\ &+ g(t)[h_s(t) - h_{s-1}(t)]\} dt \\ \text{и} \\ h_{s+1}(x) - h_s(x) &= - \int_{x_0}^x (x-t) \{f(t)[h_s'(t) - h_{s-1}'(t)] + \\ &+ g(t)[h_s(t) - h_{s-1}(t)]\} dt. \end{aligned}$$

Пусть $[\alpha, \beta]$ — компактный интервал, содержащийся в (a, b) , который в свою очередь содержит точку x_0 . Из (1.04) и сформулированных условий следует, что существуют конечные постоянные H и K , для которых в $[\alpha, \beta]$

$$|h_1(x)| \leq H, \quad |h_1'(x)| \leq H, \quad |f(x)| + |g(x)| \leq K.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |h_2'(x) - h_1'(x)| &\leq HK|x - x_0|, \quad |h_2(x) - h_1(x)| \leq \\ &\dots \leq (\beta - \alpha)HK|x - x_0|. \end{aligned}$$

С помощью индукции легко проверить, что

$$|h'_{s+1}(x) - h'_s(x)|, \quad |h_{s+1}(x) - h_s(x)| \leq HK^s L^s |x - x_0|^s / s! \quad (s \geq 0), \quad (1.07)$$

где $L = \max(\beta - \alpha, 1)$. Следовательно, каждый из рядов

$$k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h'_{s+1}(x) - h'_s(x)\}, \quad h(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h_{s+1}(x) - h_s(x)\}$$

сходится равномерно в $[\alpha, \beta]$. Поэтому функция $k(x)$ непрерывна, $h(x)$ — дифференцируема, и $k(x) = h'(x)$.

Далее, из (1.03) получаем

$$h''_{s+1}(x) - h''_s(x) = -f(x) \{h'_s(x) - h'_{s-1}(x)\} - g(x) \{h_s(x) - h_{s-1}(x)\} \quad (s \geq 1). \quad (1.08)$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{h''_{s+1}(x) - h''_s(x)\}$$

сходится равномерно. Поэтому его сумма непрерывна и равна $h''(x)$.

Суммируя обе части равенств (1.08) от $s = 1$ до $s = \infty$, видим, что функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.01) в $[\alpha, \beta]$. Кроме того, выполняются условия

$$h(x_0) = a_0, \quad h'(x_0) = a_1. \quad (1.09)$$

1.3. Поскольку значения β можно выбрать как угодно близко к b , а α — как угодно близко к a ¹⁾, остается доказать, что $h(x)$ — единственное дважды дифференцируемое решение, удовлетворяющее условиям (1.09). Разность $l(x)$ между $h(x)$ и любым другим решением, удовлетворяющим всем требованиям, имеет начальные значения $l(x_0) = l'(x_0) = 0$. Интегрируя (1.01), мы имеем

$$l'(x) = - \int_{x_0}^x \{f(t) l'(t) + g(t) l(t)\} dt$$

$$l(x) = - \int_{x_0}^x (x-t) \{f(t) l'(t) + g(t) l(t)\} dt$$

(ср. (1.05) и (1.06)).

Пусть N обозначает наименьшее число, для которого $|l(x)| \leq N$ и $|l'(x)| \leq N$ при $x \in [\alpha, \beta]$; число N конечно, поскольку $l(x)$ и $l'(x)$ непрерывны по условию. Последовательная

¹⁾ Если $b = \infty$, то это утверждение означает, что « β можно выбрать как угодно большим»; аналогично для $a = -\infty$.

подстановка в правые части двух последних уравнений дает

$$|l(x)|, |l'(x)| \leq HK^*L^*|x-x_0|^s/s!,$$

где K и L определены выше, а s — произвольное положительное целое число. Полагая $s \rightarrow \infty$, находим, что функции $l(x)$ и $l'(x)$ тождественно равны нулю. Этим завершается доказательство теоремы 1.1.

Изложенный метод построения решения уравнения (1.01) называется *методом Пикара последовательных приближений*, хотя, конечно, ничего приближенного в окончательном ответе нет. Обобщения теоремы 1.1 сформулированы ниже в упр. 1.1 и 1.2.

1.4. Пусть $w_1(x)$ и $w_2(x)$ — пара решений уравнения (1.01), обладающих тем свойством, что любое другое решение может быть записано в виде

$$w(x) = Aw_1(x) + Bw_2(x),$$

где A и B — постоянные. В этом случае говорят, что $w_1(x)$ и $w_2(x)$ образуют *фундаментальную пару*. Примером могут служить решения, удовлетворяющие условиям

$$w_1(x_0) = 1, \quad w_1'(x_0) = 0, \quad w_2(x_0) = 0, \quad w_2'(x_0) = 1,$$

в произвольно выбранной точке x_0 интервала (a, b) . Очевидно, что в этом случае $A = w(x_0)$ и $B = w'(x_0)$.

Теорема 1.2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в (a, b) , а $w_1(x)$ и $w_2(x)$ — решения уравнения (1.01). Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

- 1) $w_1(x)$ и $w_2(x)$ образуют фундаментальную пару.
- 2) Вронсиан

$$\mathscr{W}\{w_1(x), w_2(x)\} \equiv w_1(x)w_2'(x) - w_2(x)w_1'(x)$$

не обращается в нуль ни в одной внутренней точке интервала (a, b) ¹⁾.

3) Решения $w_1(x)$ и $w_2(x)$ линейно независимы, т. е. единственные постоянные A и B , для которых

$$Aw_1(x) + Bw_2(x) = 0$$

тождественно в (a, b) , суть $A = 0$ и $B = 0$.

Чтобы доказать этот результат, воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dx} \mathscr{W}\{w_1(x), w_2(x)\} = -f(x) \mathscr{W}\{w_1(x), w_2(x)\},$$

которое можно вывести с помощью дифференцирования,

¹⁾ Однако возможность того, что вронсиан стремится к нулю, когда x приближается к одной из концевых точек a или b , не исключается.

используя (1.01). Интегрирование дает

$$\mathscr{W}\{w_1(x), w_2(x)\} = Ce^{-\int f(x)dx}, \quad (1.10)$$

где C не зависит от x . Поэтому вронскиан либо равен нулю при всех x из (a, b) , либо вообще в нуль не обращается.

Предположим, что выполнено условие 1). Тогда для любой точки x_0 из (a, b) и любых заданных значений $w(x_0)$ и $w'(x_0)$ числа A и B можно найти из уравнений

$$Aw_1(x_0) + Bw_2(x_0) = w(x_0), \quad Aw'_1(x_0) + Bw'_2(x_0) = w'(x_0).$$

Из элементарной алгебры известно, что это возможно тогда и только тогда, когда выражение $w_1(x_0)w'_2(x_0) - w_2(x_0)w'_1(x_0)$ отлично от нуля. Таким образом, из 1) следует 2), и обратно, из 2) вытекает 1).

Далее, предположим, что выполнено условие 2). Тогда единственными числами A и B , удовлетворяющими уравнениям

$$Aw_1(x_0) + Bw_2(x_0) = 0, \quad Aw'_1(x_0) + Bw'_2(x_0) = 0,$$

являются $A = B = 0$. Поэтому из 2) следует 3).

Наконец, предположим, что выполняется условие 3) и $\mathscr{W}(w_1, w_2) = 0$. Очевидно, что решение

$$w(x) = w_2(x_0)w_1(x) - w_1(x_0)w_2(x)$$

удовлетворяет условиям $w(x_0) = w'(x_0) = 0$. Следовательно, в силу § 1.3 $w(x) \equiv 0$, поэтому в силу 3) $w_1(x_0) = w_2(x_0) = 0$. Аналогично, рассматривая решение $w_2(x_0)w_1(x) - w'_1(x_0)w_2(x)$, мы видим, что $w'_1(x_0) = w'_2(x_0) = 0$. Снова используя § 1.3, найдем, что $w_1(x) \equiv 0$ и $w_2(x) \equiv 0$. Однако это противоречит условию 3); следовательно, предположение $\mathscr{W}(w_1, w_2) = 0$ неверно. Таким образом, из 3) следует 2). Этим доказательство завершается.

Равенство (1.10) называется *тождеством Абеля*. Непосредственным следствием равенства $f(x) = 0$, т. е. *когда в уравнении нет членов с первой производной*, является утверждение о том, что *вронскиан любой пары решений есть величина постоянная*.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. (Теорема существования для неоднородных уравнений.) Показать, что теорема 1.1 остается справедливой и в случае, когда правая часть уравнения (1.01) заменяется функцией от x , непрерывной в (a, b) .

1.2. Пусть a и b конечны или бесконечны; предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в (a, b) , за исключением конечного множества точек X , а $|f(x)|$ и $|g(x)|$ интегрируемы в (a, b) . Показать, что существует един-

ственная функция $w(x)$ со следующими свойствами в замыкании (a, b) : 1) $w'(x)$ непрерывна; 2) $w''(x)$ непрерывна, исключая точки $x \in X$; 3) $w(x)$ удовлетворяет уравнению (1.10), исключая точки $x \in X$; 4) заданы $w(x_0)$ и $w'(x_0)$, где x_0 — любая точка из замыкания (a, b) , включая множество X .

§ 2. Уравнения, содержащие действительный или комплексный параметр

2.1. Многие из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют специальные функции, содержат один или несколько параметров, и часто бывает необходимо знать, как решения ведут себя, когда параметры меняются.

Теорема 2.1. Пусть в уравнении

$$\frac{d^2w}{dx^2} + f(u, x) \frac{dw}{dx} + g(u, x) w = 0 \quad (2.01)$$

u и x изменяются в ограниченном прямоугольнике R : $u_0 \leq u \leq u_1$, $\alpha \leq x \leq \beta$ и предположим, что функции $f(u, x)$ и $g(u, x)$ непрерывны в R . Допустим также, что x_0 — фиксированная точка из $[\alpha, \beta]$ и что значения w и dw/dx в x_0 являются заданными непрерывными функциями u . Тогда решение w и его частные производные dw/dx и d^2w/dx^2 непрерывны в R .

Если, кроме того, $\partial f/\partial u$ и $\partial g/\partial u$ непрерывны в R , а значения dw/du и $d^2w/(du dx)$ при $x = x_0$ — непрерывные функции u , то dw/du , $d^2w/(du dx)$ и $d^3w/(du dx^2)$ непрерывны в R .

В этом утверждении «непрерывность в R » означает, как обычно, непрерывность функций одновременно по обоим переменным в R . Эта теорема является частным случаем общих результатов теории дифференциальных уравнений¹⁾.

Для доказательства мы снова проведем рассуждения, как в § 1.2, имея в виду, что функции $h_s(x) = h_s(u, x)$ зависят теперь от u . Из (1.04) и сформулированных условий непосредственно следует, что функции $h_1(u, x)$ и $\partial h_1(u, x)/\partial x$ непрерывны в R . Положим

$$H_s(u, x) = f(u, x) \{ \partial h_s(u, x) / \partial x + g(u, x) h_s(u, x) \},$$

и пусть δu и δx — произвольные приращения u и x соответственно. Из (1.05) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2(u - \delta u, x + \delta x)}{\partial x} - \frac{\partial h_2(u, x)}{\partial x} = \\ = - \int_{x_0}^x \{ H_1(u + \delta u, t) - H_1(u, t) \} dt - \int_x^{x+\delta x} H_1(u + \delta u, t) dt + \\ + a_1(u + \delta u) - a_1(u), \end{aligned} \quad (2.02)$$

¹⁾ Хартман (1970, глава V).

где $a_1(u)$ — заданное значение $\partial w/\partial x$ в точке x_0 . Поскольку f , g , h_1 , $\partial h_1/\partial x$ и a_1 непрерывны в R , они там автоматически равномерно непрерывны. Поэтому правая часть (2.02) численно меньше любого наперед заданного положительного числа ε , если только оба приращения $|\delta u|$ и $|\delta(x)|$ достаточно малы.

В силу этого производная $\partial h_2/\partial x$ непрерывна. То же справедливо относительно h_2 . С помощью аналогичных рассуждений и индукции можно убедиться, что функции $\partial h_s/\partial x$ и h_s непрерывны при $s = 3, 4, \dots$

В последующей части рассуждений § 1.2 числа H , K и L можно выбрать не зависящими от u . Следовательно, ряды

$$\sum (h_{s+1} - h_s), \quad \sum \left(\frac{\partial h_{s+1}}{\partial x} - \frac{\partial h_s}{\partial x} \right) \quad (2.03)$$

сходятся равномерно относительно обеих переменных. Поэтому соответствующие суммы w и $\partial w/\partial x$ непрерывны в R . Из этого результата и дифференциального уравнения (2.01) следует, что функция $\partial^2 w/\partial x^2$ непрерывна. Этим завершается доказательство первой части теоремы.

Обращаясь ко второй части, мы замечаем, что в силу условий функции $\partial h_1/\partial u$ и $\partial^2 h_1/(\partial u \partial x)$ непрерывны, и поэтому в случае $s = 2$ в выражениях (1.05) и (1.06) можно дифференцировать под знаком интеграла¹⁾. Отсюда, как и при рассмотрении $\partial h_2/\partial x$ и h_2 , следует, что функции $\partial^2 h_2/(\partial u \partial x)$ и $\partial h_2/\partial u$ непрерывны в R . Повторение рассуждений показывает, что функции $\partial h_s/\partial u$ и $\partial^2 h_s/(\partial u \partial x)$ непрерывны при $s = 3, 4, \dots$. Если продифференцировать выражения (1.05) и (1.06), то в силу аргументов, аналогичных приведенным в § 1.2, ряды

$$\sum \left(\frac{\partial h_{s+1}}{\partial u} - \frac{\partial h_s}{\partial u} \right), \quad \sum \left(\frac{\partial^2 h_{s+1}}{\partial u \partial x} - \frac{\partial^2 h_s}{\partial u \partial x} \right)$$

сходятся равномерно в R . Поэтому функции $\partial w/\partial u$ и $\partial^2 w/(\partial u \partial x)$ непрерывны. Что касается функции $\partial^3 w/(\partial u \partial x^2)$, то мы просто можем сослаться на уравнение, полученное при дифференцировании (2.01). Доказательство закончено.

2.2. В случае, когда u — комплексная переменная (x остается действительным), голоморфность коэффициентов дифференциального уравнения влечет голоморфность решений при условии, что начальные условия также голоморфны.

Теорема 2.2. *Предположим, что*

1) *функции $f(u, x)$ и $g(u, x)$ непрерывны по обоим переменным, когда u и x меняются в области U , а x меняется в компактном интервале $[\alpha, \beta]$;*

¹⁾ Г. М. Фиктенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., «Наука», 1970, п. 507.

2) при любом x из $[\alpha, \beta]$ функции $f(u, x)$ и $g(u, x)$ голоморфны по u ;

3) значения w и $\partial w/\partial x$ в некоторой фиксированной точке x_0 из $[\alpha, \beta]$ — голоморфные функции u .

Тогда при любом $x \in [\alpha, \beta]$ решение $w(u, x)$ уравнения (2.01) и его первые две частные производные по x являются голоморфными функциями u .

Прямое обобщение доказательства первой части теоремы 2.1 показывает, что $\partial h_s(u, x)/\partial x$ и $h_s(u, x)$ — непрерывные функции u и x при всех s . Далее мы применяем теорему 1.1 из главы 2 к интегралам (1.05) и (1.06). Из индукции следует, что функции $\partial h_s(u, x)/\partial x$ и $h_s(u, x)$ голоморфны по u при $s = 1, 2, \dots$. Снова, как и в § 2.1, ряды (2.03) сходятся равномерно относительно u и x в компактных множествах. Этим устанавливается голоморфность w и $\partial w/\partial x$. Что касается $\partial^2 w/\partial x^2$, то снова можно сослаться на (2.01).

УПРАЖНЕНИЕ

2.1. Показать, что первую часть теоремы 2.1 можно обобщить так, чтобы начальная точка x_0 зависела от u , при условии, что x_0 и значения w и $\partial w/\partial x$ в x_0 являются непрерывными функциями u .

§ 3. Теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений: комплексные переменные

3.1. Теорема 3.1¹⁾. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в односвязной области Z . Тогда уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0 \quad (3.01)$$

имеет бесчисленное множество решений, голоморфных в Z . Если значения w и dw/dz заданы в некоторой точке, то решение единственно.

Доказательство проводится как в теореме 1.1. Сначала мы предполагаем, что Z — это круг $|z - a| < r$ и что z_0 — точка из Z , в которой заданы значения

$$a_0 = w(z_0), \quad a_1 = w'(z_0). \quad (3.02)$$

Последовательность $h_s(z)$, $s = 0, 1, 2, \dots$ определяется как и раньше, только x заменяется на z , а в качестве путей интегрирования выбираются прямые линии. Предположим, что $z \in Z_1$, где Z_1 — замкнутый круг $|z - a| \leq \rho$, а ρ — любое число, для которого $|z_0 - a| < \rho < r$. Тогда существуют такие числа H и K ,

¹⁾ Фукс (1866).

что

$$|h_1(z)| \leq H, \quad |h'_1(z)| \leq H, \quad |f(z)| + |g(z)| \leq K$$

при $z \in Z_1$. В соответствии с (1.07) имеем

$$|h'_{s+1}(z) - h'_s(z)|, \quad |h_{s+1}(z) - h_s(z)| \leq HK^s L^s |z - z_0|^s / s!,$$

где $L = \max(2\rho, 1)$. Поэтому членами ряда

$$h(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h_{s+1}(z) - h_s(z)\} \quad (3.03)$$

являются голоморфные функции; он сходится равномерно в Z_1 и, следовательно, в любом компактном множестве, содержащемся в Z , поскольку ρ можно выбрать как угодно близким к r . Таким образом, сумма $h(z)$ голоморфна в Z , и ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Вследствие этого функция $h(z)$ удовлетворяет уравнению (3.01). Единственность устанавливается как в § 1.3 или на основании того, что в силу (3.01) и (3.02) все производные решения заданы в точке z_0 .

Чтобы закончить доказательство теоремы 3.1, мы напомним, что Z — область, любые две точки которой можно соединить конечной цепочкой пересекающихся кругов, содержащихся в Z . Мы просто применим только что полученный результат к каждому из кругов по очереди. Условие, чтобы область Z была односвязной, необходимо для того, чтобы решение, полученное с помощью аналитического продолжения, было однозначным¹⁾.

3.2. Определения фундаментальной пары решений, вронскиана и линейной независимости, так же как и результат, сформулированный в теореме 1.2, без изменений переносятся в комплексную плоскость.

Ряд (3.03) называется *разложением Лиувилля — Неймана* для решения дифференциального уравнения. Он играет важную роль в доказательстве существования, но в численных расчетах предпочтение обычно отдается другим видам разложений, например, ряду Тейлора. Пусть r — кратчайшее расстояние от точки $z = z_0$ до особых точек $f(z)$ и $g(z)$ и пусть

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s(z - z_0)^s, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(z - z_0)^s$$

— разложения функций $f(z)$ и $g(z)$ в круге $|z - z_0| < r$. Теорема 3.1 показывает, что все голоморфные решения уравнения

¹⁾ Соответствующее утверждение называется теоремой о монодромии; см., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука», 1968, гл. 8, § 5.

(3.01) разлагаются в ряды вида

$$w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - z_0)^s, \quad (3.04)$$

также сходящиеся в $|z - z_0| < r$. Подставляя это выражение в (3.01) и приравнявая коэффициенты, мы находим, что a_0 и a_1 можно задавать произвольно (как мы и ожидали); коэффициенты с большими номерами определяются из рекуррентных соотношений

$$-s(s-1)a_s = (s-1)f_0 a_{s-1} + (s-2)f_1 a_{s-2} + \dots + f_{s-2} a_1 + + g_0 a_{s-2} + g_1 a_{s-3} + \dots + g_{s-2} a_0 \quad (s \geq 2).$$

3.3. Рассмотрим снова случай, когда дифференциальное уравнение содержит параметр.

Теорема 3.2. Предположим, что в уравнении

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(u, z) \frac{dw}{dz} + g(u, z) w = 0 \quad (3.05)$$

и u и z изменяются в фиксированных, но не обязательно ограниченных областях U и Z комплексных плоскостей, и

1) *$f(u, z)$ и $g(u, z)$ — непрерывные функции обеих переменных;*

2) *$f(u, z)$ и $g(u, z)$ — голоморфные функции z при любом u ;*

3) *$f(u, z)$ и $g(u, z)$ — голоморфные функции u при любых z ;*

4) *значения w и dw/dz в фиксированной точке $z_0 \in Z$ являются голоморфными функциями u .*

Тогда в любой точке z области Z решение $w(u, z)$ уравнения (3.04) и его первые две частные производные по z являются голоморфными функциями u .

Этот результат может быть доказан следующим образом с помощью теоремы 2.2. Начальная точка z_0 соединяется с z путем \mathcal{P} , лежащим в Z и имеющим уравнение вида $t = t(\tau)$, где t — текущая точка пути, а τ — дуговой параметр. На пути \mathcal{P} функция w является комплексной функцией действительной переменной τ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \left[t'(\tau) f\{u, t(\tau)\} - \frac{t''(\tau)}{t'(\tau)} \right] \frac{dw}{d\tau} + \{t'(\tau)\}^2 g\{u, t(\tau)\} w = 0. \quad (3.06)$$

Предположим теперь, что \mathcal{P} можно выбрать так, чтобы а) функция $t''(\tau)$ была непрерывной, б) $t'(\tau)$ не обращалась в нуль. Тогда коэффициенты перед $dw/d\tau$ и w в (3.06) непрерывны; поэтому из теоремы 2.2 следует, что каждая из трех функций

$$w, \quad \frac{dw}{d\tau} \equiv t'(\tau) \frac{dw}{dz}, \quad \frac{d^2 w}{d\tau^2} \equiv \{t'(\tau)\}^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + t''(\tau) \frac{dw}{d\tau}$$

голоморфна по w во всех точках \mathcal{P} , включая, в частности, точку $t = z$.

Условия а) и б), конечно, выполняются, когда \mathcal{P} — прямая линия. Но в любом случае можно всегда выбрать \mathcal{P} состоящим из конечной цепочки прямолинейных отрезков. На каждом отрезке w удовлетворяет уравнению вида (3.06). В начале каждого отрезка значения функций w и $\{t'(\tau)\}^{-1}dw/d\tau$ — те же самые, что и в конце предыдущего отрезка, и поэтому они голоморфны по u ¹⁾. Применение теоремы 2.2 поочередно к каждому отрезку доказывает теорему 3.2.

Другой путь для завершения доказательства предложен ниже в упр. 3.4.

3.4. Условия а) и б) из § 3.3 требуют от дуги \mathcal{P} более, чем регулярности, так как в этом случае нужно было бы заменить а) на условие «функция $t'(\tau)$ непрерывна» (ср. главу 1, § 11.5). Мы будем называть пути, удовлетворяющие а) и б), R_2 -дугами. Регулярные дуги будут называться R_1 -дугами. Аналогичным образом путь, на котором все производные $t(\tau)$ непрерывны и $t'(\tau)$ не обращается в нуль, называется R_∞ -дугой. Все пути, обычно используемые в теории функций комплексной переменной и состоящие из прямолинейных отрезков, дуг окружностей, отрезков парабол и т. д., являются цепочками R_∞ -дуг, и, тем более, R_2 дуг.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Показать, что уравнение $(\operatorname{ch} z)w'' + w = 0$ имеет фундаментальную пару решений, разлагающихся в ряды Маклорена вида

$$1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{12}z^4 - \frac{13}{720}z^6 + \dots \quad z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{30}z^5 - \frac{11}{1680}z^7 + \dots$$

и проверить коэффициенты с помощью вронскиана.

Каков радиус сходимости каждого из рядов?

3.2. Показать, что в z -плоскости дифференциальное уравнение Вебера

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \left(\frac{1}{4}z^2 + a \right) w$$

имеет независимые решения

$$w_1 = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!}, \quad w_2 = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+1} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

где $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a$ и

$$a_{s+2} = a a_s + \frac{1}{4} s(s-1) a_{s-2} \quad (s \geq 2).$$

¹⁾ Однако значения $dw/d\tau$ в точках соединения отличаются.

Показать также, что

$$w_1 = \exp \left(\mp \frac{1}{4} z^2 \right) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} a \pm \frac{5}{4} \right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(\frac{1}{2} a \pm s \mp \frac{3}{4} \right) \frac{2^s z^{2s}}{(2s)!},$$

$$w_2 = \exp \left(\mp \frac{1}{4} z^2 \right) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a \pm \frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{2} a \pm \frac{7}{4} \right) \times \dots$$

$$\dots \times \left(\frac{1}{2} a \pm s \mp \frac{1}{4} \right) \frac{2^s z^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

где всюду выбирается либо верхний, либо нижний знак.

3.3. Пусть, в обозначениях § 3.2, F и G — максимумы модулей соответственно $f(z)$ и $g(z)$ на окружности $|z - z_0| = \rho$, где ρ — любое число, меньшее r . Пусть число K больше F и $G\rho$. С помощью формулы Коши и индукции проверить, что $|a_s| \leq b_s$, $s = 0, 1, 2, \dots$, где $b_1 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$ и

$$s(s-1)b_s = K\{sb_{s-1} + (s-1)b_{s-2}\rho^{-1} + (s-2)b_{s-3}\rho^{-2} + \dots + b_0\rho^{-s+1}\},$$

когда $s \geq 2$. Вывести также соотношение

$$s(s-1)b_s - (s-1)(s-2)b_{s-1}\rho^{-1} = Ksb_{s-1} \quad (s \geq 3)$$

и на его основе прямым вычислением доказать, что радиус сходимости ряда (3.04) не меньше r^1 .

3.4. Показать, что любые две точки области можно соединить простой R_2 -дугой, лежащей в области.

§ 4. Классификация особых точек; свойства решений в окрестности регулярной особой точки

4.1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в точке $z = z_0$, то она называется *обыкновенной точкой* дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0. \quad (4.01)$$

Если $z = z_0$ не является обыкновенной точкой, но функции $(z - z_0)f(z)$ и $(z - z_0)^2 g(z)$ в ней аналитичны, то z_0 называется *регулярной особой точкой* или *особой точкой первого рода*.

Наконец, если z_0 не является ни обыкновенной, ни регулярной особой точкой, то она называется *иррегулярной особой точкой* или *особой точкой второго рода*. Если особенности $f(z)$ и $g(z)$ в точке z_0 не сильнее полюсов, то z_0 называется *особой точкой ранга $l-1$* , где l — наименьшее целое число, для которого функции $(z - z_0)^l f(z)$ и $(z - z_0)^{2l} g(z)$ аналитичны. Таким образом,

¹⁾ Эта процедура является методом Коши доказательства существования решения.

регулярная особая точка имеет ранг, равный нулю. Если хотя бы одна из функций $f(z)$ или $g(z)$ имеет в z_0 существенно особую точку, то говорят, что ранг равен бесконечности.

В § 3 мы показали, что в окрестности обыкновенной точки дифференциальное уравнение имеет линейно независимую пару голоморфных решений. В этом параграфе и в § 5 мы построим в окрестности регулярной особой точки решения в виде сходящихся рядов. Для иррегулярных особых точек такого построения в общем случае сделать нельзя; исследование этого более сложного случая мы отложим до глав 6 и 7.

4.2. Без потери общности можно считать, что регулярная особая точка находится в начале координат. В соответствии с этим мы предположим, что в окрестности $|z| < r$ существуют сходящиеся ряды

$$zf(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s z^s, \quad z^2 g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s z^s, \quad (4.02)$$

где хотя бы один из коэффициентов f_0 , g_0 и g_1 отличен от нуля.

Мы можем ожидать, что решения имеют вид, который получается, если заменить $f(z)$ и $g(z)$ главными членами разложений (4.02); таким образом,

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{f_0}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{g_0}{z^2} w = 0.$$

Точными решениями этого уравнения служат функции $w = z^\alpha$, где α — корень квадратного уравнения

$$\alpha(\alpha - 1) + f_0 \alpha + g_0 = 0. \quad (4.03)$$

Поэтому в качестве возможных решений уравнения (4.01) мы выберем ряды

$$w(z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s, \quad (4.04)$$

в которых α является корнем *определяющего уравнения* (4.03). Два возможных значения α называют *показателями* особой точки. Подставляя (4.02) и (4.04) в дифференциальное уравнение и формально приравнявая коэффициенты при $z^{\alpha+s-2}$, получаем

$$Q(\alpha + s) a_s = - \sum_{j=0}^{s-1} \{(\alpha + j) f_{s-j} + g_{s-j}\} a_j \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (4.05)$$

где через $Q(\alpha)$ обозначена левая часть уравнения (4.03). Уравнение (4.05) рекуррентно определяет a_1, a_2, \dots в терминах произвольно заданного (ненулевого) значения a_0 . Этот метод неэффективен тогда и только тогда, когда $Q(\alpha + s)$ обращается в нуль при некотором положительном целом значении s .

Поэтому, если корни определяющего уравнения различны и их разность не равна целому числу, можно проверить, что два ряда вида (4.04) формально удовлетворяют дифференциальному уравнению. В других случаях существует лишь одно решение такого типа, если только правая часть (4.05) не обращается в нуль при том же самом положительном целом значении s , при котором $Q(\alpha + s) = 0$.

4.3. Теорема 4.1¹⁾. В обозначениях и при условиях § 4.2 ряд (4.04) сходится и определяет в круге $|z| < r$ решение дифференциального уравнения (4.01), если другой показатель имеет вид, отличный от $\alpha + s$, где s — положительное целое число.

Пусть ρ — любое число, меньшее r , а число K больше, чем

$$\max_{|z|=\rho} |zf(z)|, \quad \max_{|z|=\rho} |z^2g(z)|.$$

Тогда из формулы Коши вытекают следующие неравенства для коэффициентов рядов (4.02):

$$|f_s| \leq K\rho^{-s}, \quad |g_s| \leq K\rho^{-s}.$$

Обозначим через β второй показатель и пусть $n \equiv [|\alpha - \beta|]$. Определим b_s равенством $b_s = |a_s|$ при $s = 0, 1, \dots, n$ и условием

$$s(s - |\alpha - \beta|)b_s = K \sum_{j=0}^{s-1} (|\alpha| + j + 1)b_j\rho^{j-s} \quad (4.06)$$

при $s \geq n + 1$. По индукции, используя (4.05) и тождество $Q(\alpha + s) = s(s + \alpha - \beta)$, можно проверить, что $|a_s| \leq b_s$.

Если в (4.06) заменить s на $s - 1$ и вычесть полученное уравнение из (4.06), то можно убедиться, что мажорирующие коэффициенты b_s также удовлетворяют более простому рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \rho s(s - |\alpha - \beta|)b_s - (s - 1)(s - 1 - |\alpha - \beta|)b_{s-1} = \\ = K(|\alpha| + s)b_{s-1} \quad (s \geq n + 2). \end{aligned}$$

Деля обе части равенства на s^2b_s и полагая $s \rightarrow \infty$, мы находим, что

$$b_{s-1}/b_s \rightarrow \rho,$$

а это и означает, что радиус сходимости ряда $\sum b_s z^s$ равен ρ . Поэтому в силу признака сравнения радиус сходимости ряда (4.04) не меньше ρ . А поскольку ρ можно выбрать как угодно близко к r , то этот радиус сходимости не меньше r . Хорошо известные свойства степенных рядов указывают на то, что подстановка и

¹⁾ Фробениус (1873). Сравните доказательство с методом Коши, наменным в упр. 3.3.

почленное дифференцирование, использованные в § 4.2, имеют оправдание, и поэтому ряд (4.04) является решением уравнения (4.01) при $|z| < r$. Доказательство закончено.

Если α — неотрицательное целое число, то решение с показателем α аналитично в $z = 0$. Когда α — отрицательное целое число, решение имеет полюс, а когда α — нецелое число — точку ветвления. Если разность показателей не равна целому числу, то снова можно дважды применить теорему, и полученные решения образуют фундаментальную пару, причем по крайней мере одно из решений имеет точку ветвления в особой точке.

УПРАЖНЕНИЕ

4.1. Найти в виде рядов независимые решения уравнения

$$z^2(z-1)w'' + \left(\frac{3}{2}z-1\right)zw' + (z-1)w = 0:$$

1) в окрестности $z = 0$, 2) в окрестности $z = 1$.

§ 5. Второе решение в случае, когда разность показателей равна целому числу или нулю

5.1. Предположим, что α и β — корни определяющего уравнения (4.03) и $\alpha - \beta = n$, где n — положительное целое число или нуль.

Теорема 4.1 дает решение

$$w_1(z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s. \quad (5.01)$$

Чтобы найти второе независимое решение, мы используем стандартную подстановку, приводящую к понижению порядка дифференциального уравнения, если одно решение известно:

$$w(z) = w_1(z)v(z).$$

Тогда

$$v''(z) + \left\{ 2 \frac{w_1'(z)}{w_1(z)} + f(z) \right\} v'(z) = 0.$$

Рассматривая это выражение как дифференциальное уравнение первого порядка относительно $v'(z)$ и используя (1.02), мы получаем

$$v(z) = \int \frac{1}{\{w_1(z)\}^2} \exp \left\{ - \int f(z) dz \right\} dz.$$

5.2. Каковы свойства решения $w_2(z) = w_1(z)v(z)$ в окрестности точки $z = 0$? Из (4.02) и (5.01) вытекает, что

$$\frac{1}{\{w_1(z)\}^2} \exp \left\{ - \int f(z) dz \right\} = \\ = \frac{1}{z^{2\alpha} (a_0 + a_1 z + \dots)} \exp \left(-f_0 \ln z - f_1 z - \frac{1}{2} f_2 z^2 - \dots \right),$$

а из (4.03) — равенство $f_0 = 1 - \alpha - \beta = 1 + n - 2\alpha$. Следовательно,

$$\frac{1}{\{w_1(z)\}^2} \exp \left\{ - \int f(z) dz \right\} = \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке $z = 0$. Пусть ряд Маклорена для $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s z^s,$$

где коэффициенты φ_s выражаются через a_s и f_s ; в частности, $\varphi_0 = 1/a_0^2$. Интегрируя $z^{-n-1}\varphi(z)$ и умножая результат на $w_1(z)$, мы получаем

$$w_2(z) = w_1(z) \left\{ - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\varphi_s}{(n-s) z^{n-s}} + \varphi_n \ln z + \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_s z^{s-n}}{s-n} \right\}. \quad (5.02)$$

Если $n = 0$, т. е. показатели совпадают, то (5.02) имеет вид

$$w_2(z) = \varphi_0 w_1(z) \ln z + z^{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s. \quad (5.03)$$

Так как φ_0 не равняется нулю, функция $w_2(z)$ имеет в особой точке логарифмическую точку ветвления и

$$w_2(z) \sim (z^2 \ln z)/a_0 \quad (z \rightarrow 0).$$

Если же n — положительное целое число, то (5.02) принимает вид

$$w_2(z) = \varphi_n w_1(z) \ln z + z^{\beta} \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s. \quad (5.04)$$

Свободный член в последней сумме определяется равенством

$$c_0 = -a_0 \varphi_0 / n = -1/(n a_0)$$

и всегда отличен от нуля. Таким образом,

$$w_2(z) \sim -z^{\beta}/(n a_0) \quad (z \rightarrow 0).$$

Может случиться, что $\varphi_n = 0$, и в этом случае слагаемое с логарифмом в (5.04) отсутствует¹⁾.

Поскольку единственными возможными особыми точками решений $w_1(z)$ и $w_2(z)$ являются особые точки функций $f(z)$ и $g(z)$, радиус сходимости рядов (5.03) и (5.04) не меньше, чем расстояние от начала координат до ближайшей особой точки функций $zf(z)$ и $z^2g(z)$.

После того как вид второго решения выяснен, не имеет смысла использовать описанный выше метод для вычисления коэффициентов. В общем случае легче подставить (5.03) и (5.04) прямо в первоначальное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты. Поскольку второе решение определено с точностью до произвольного постоянного множителя, в случае $n > 0$ значение c_0 может быть выбрано произвольно. В этом случае φ_n определяется автоматически.

5.3. Если коэффициенты в дифференциальном уравнении являются функциями параметра u , а разность показателей особой точки равна целому числу или нулю для критического значения u_0 параметра u , то другой способ построения ряда для второго решения при $u = u_0$ состоит в определении предельного значения отношения

$$\{w_2(u, z) - w_1(u, z)\} / (u - u_0). \quad (5.05)$$

Здесь $w_1(u, z)$ и $w_2(u, z)$ — решения, полученные методом § 4, которые линейно независимы при $u \neq u_0$ и совпадают при $u = u_0$. Для действительных переменных переход к пределу можно обосновать следующим образом.

Положим

$$\varphi(u, x) = w_2(u, x) - w_1(u, x).$$

При условиях теоремы 2.1 величина $[\partial\varphi(u, x)/\partial u]_{u=u_0}$ существует и равна предельному значению выражения (5.05) при $u = u_0$. Дифференцирование первоначального дифференциального уравнения (2.01) по u дает

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0. \quad (5.06)$$

Если выполнены условия теоремы 2.1, то все частные производные, имеющиеся в этом уравнении, — непрерывные функции обеих переменных. Поскольку это верно и для $\partial^2 u / \partial x^2$, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial x^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial u}.$$

Пусть $u \rightarrow u_0$. По предположению, функции $\varphi(u, x)$ и $\partial\varphi(u, x)/\partial x$

¹⁾ Это имеет место в ситуации, упомянутой в заключительном предложении § 4.2.

обращаются в нуль. Поэтому (5.06) превращается в (2.01), где $w = [\partial\phi/\partial u]_{u=u_0}$. Этим наше утверждение доказано.

На комплексные значения z решения в виде рядов, полученные для действительной переменной, обобщаются с помощью аналитического продолжения.

Этот метод принадлежит Фробениусу (1873). В случае применимости он дает самый простой способ вычисления ряда для второго решения. Примеры будут приведены позднее в этой главе и в главе 7.

УПРАЖНЕНИЕ

5.1. Показать, что внутри единичного круга уравнение $z(z-1)w'' + (2z-1)w' + \frac{1}{4}w = 0$ имеет независимые решения

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s, \quad \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s \right) \ln z + 4 \sum_{s=1}^{\infty} \{ \psi(2s+1) - \psi(s+1) \} a_s z^s,$$

где ψ — логарифмическая производная гамма функции и

$$a_s = 1^2 \cdot 3^2 \dots (2s-1)^2 / \{2^2 \cdot 4^2 \dots (2s)^2\} \quad [\text{Уиттекер и Ватсон, 1963}].$$

§ 6. Большие значения независимой переменной

6.1. Чтобы рассмотреть решения в окрестности бесконечно удаленной точки, мы сделаем преобразование $z = 1/t$. Уравнение (4.01) примет вид

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + p(t) \frac{dw}{dt} + q(t) w = 0, \quad (6.01)$$

где

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right), \quad q(t) = \frac{1}{t^4} g\left(\frac{1}{t}\right).$$

Особая точка уравнения (4.01) при $z = \infty$ классифицируется согласно виду особой точки уравнения (6.01) при $t = 0$.

Таким образом, бесконечно удаленная точка является обыкновенной для (4.01), если $p(t)$ и $q(t)$ аналитичны при $t = 0$, т. е. если $2z - z^2 f(z)$ и $z^4 g(z)$ аналитичны в бесконечно удаленной точке. В этом случае все аналитические решения могут быть разложены в ряды вида

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^{-s},$$

которые сходятся при достаточно больших z .

Далее, бесконечно удаленная точка является регулярной особой точкой для (4.01), если $t^{-1}f(t^{-1})$ и $t^{-2}g(t^{-1})$ аналитичны при

$t = 0$, т. е. если $f(z)$ и $g(z)$ разлагаются в ряды вида

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s},$$

когда значение $|z|$ велико. В этом случае существует по крайней мере одно решение вида

$$w(z) = \frac{1}{z^\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}.$$

Число α здесь также называется *показателем* решения или особой точки. Оно удовлетворяет уравнению

$$\alpha(\alpha+1) - f_0\alpha + g_0 = 0$$

(ср. (4.03) и (4.04)).

Наконец, если хотя бы одна из функций $z f(z)$ и $z^2 g(z)$ сингулярна в бесконечно удаленной точке, то $z = \infty$ является *иррегулярной особой точкой* дифференциального уравнения. Ранг равен $m+1$, где m — такое наименьшее неотрицательное целое число, что функции $z^{-m} f(z)$ и $z^{-2m} g(z)$ аналитичны на бесконечности.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Каков вид особенности в бесконечно удаленной точке для уравнений

$$(z^2 + 1)^{1/2} w'' = w' + w, \quad w'' + (\sin z) w' + (\cos z) w = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ (z^4 + 2z^2) \frac{dw}{dz} \right\} + (z^2 + 1) w = 0?$$

Вычислить показатели или ранг.

6.2. Построить независимые решения в виде рядов для уравнения $(1 - z^2) w'' - 2zw' + 12w = 0$, справедливые вне единичного круга.

§ 7. Численно удовлетворительные решения

7.1. В § 1.4 мы видели, что все дважды непрерывно дифференцируемые решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка можно записать в виде линейной комбинации фундаментальной пары решений. Однако в приложениях фундаментальная пара решений может не определять все другие решения адекватным образом. Рассмотрим, например, уравнение

$$d^2 w / dz^2 = w.$$

Оно имеет общее решение

$$w = A e^z + B e^{-z}, \quad (7.01)$$

где A и B — произвольные постоянные. Другое представление

дается формулой

$$w = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z. \quad (7.02)$$

Если у нас имеются таблицы функций e^z и e^{-z} с некоторым числом значащих цифр, то мы можем вычислить выражение (7.01) почти с одинаковой точностью для всех значений A и B . Такая точность, однако, может не получиться, если вместо указанных таблиц мы используем аналогичные таблицы для $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$. Если числа A и $-B$ равны или очень близки друг к другу, то имеет место сильное взаимное сокращение между членами правой части (7.02) при больших положительных значениях $\operatorname{Re} z$. Аналогичное явление происходит и в случае, когда A и B равны, а значения $\operatorname{Re} z$ принимают большие по модулю отрицательные значения.

По этой причине функции e^z и e^{-z} называются *численно удовлетворительной*¹⁾ парой решений в окрестности бесконечно удаленной точки. Пара $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ не является численно удовлетворительной в этой области, несмотря на то, что эти функции линейно независимы.

7.2. В предыдущем примере бесконечно удаленная точка была иррегулярной особой точкой дифференциального уравнения. Аналогичные рассуждения применимы и к регулярным особым точкам. Действительно, легко видеть, что в окрестности *регулярной особой точки* одним из элементов численно удовлетворительной пары решений должно быть решение, построенное методами §§ 4—6, исходя из показателя с наибольшей действительной частью, или, в случае равных показателей, не содержащее в своем разложении логарифмического члена. Это решение, которое определено с точностью до произвольного постоянного множителя, называется *подчиненным* в особой точке. Любое решение, которое линейно независимо с подчиненным, называется *доминирующим* в особой точке, поскольку его отношение к подчиненному решению стремится к бесконечности, когда аргумент приближается к особой точке.

Различие между подчиненностью и доминантностью важно также при описании решений дифференциальных уравнений. Если α и β — показатели в конечной особой точке z_0 и $\operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta$, то ясно, что условие

$$w \sim (z - z_0)^\alpha \quad (z \rightarrow z_0) \quad (7.03)$$

определяет решение однозначно. С другой стороны, существует бесконечное число решений, удовлетворяющих условию

$$w \sim (z - z_0)^\beta \quad (z \rightarrow z_0),$$

¹⁾ Дж. К. П. Миллер (1950).

так как добавление произвольного кратного подчиненного решения не изменяет общего асимптотического поведения.

Аналогично, если $\alpha = \beta$, то условие (7.03) снова определяет w единственным образом, в отличие от условия

$$w \sim (z - z_0)^\alpha \ln(z - z_0) \quad (z \rightarrow z_0);$$

сравните (5.03).

Один из случаев, исключенных из предыдущего рассмотрения, имеет место, когда $\alpha \neq \beta$, но $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta$. Ни решение в виде ряда, построенное исходя из α , ни построенное исходя из β , не доминирует над другим, и два решения образуют численно удовлетворительную пару решений в окрестности точки z_0 .

Аналогичное рассмотрение можно провести и тогда, когда особая точка находится на бесконечности.

7.3. Подчиненность и доминантность связаны с рассматриваемой особой точкой. Решение, подчиненное в одной особой точке, может оказаться доминирующим в других; в действительности так обычно и бывает.

В области, содержащей две регулярные особые точки z_1 и z_2 , численно удовлетворительная пара решений состоит из решения, подчиненного в z_1 и доминирующего в z_2 , и решения, подчиненного в z_2 и доминирующего в z_1 . Если же *одно и то же* решение является подчиненным в z_1 и в z_2 , то для него в качестве второго элемента пары можно взять любое независимое решение, поскольку оно обязательно будет доминирующим в точках z_1 и z_2 .

В области, содержащей n регулярных особых точек, как правило, невозможно выбрать *единственную* пару решений, которая была бы численно удовлетворительной во всей области. В общем случае существует n подчиненных решений, и требуется детальная информация о каждом из них для того, чтобы иметь удовлетворительную основу для построения всех возможных решений дифференциального уравнения.

§ 8. Гипергеометрическое уравнение

8.1. Дифференциальное уравнение

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\} \frac{dw}{dz} - abw = 0, \quad (8.01)$$

в котором a , b и c — действительные или комплексные параметры, называется *гипергеометрическим уравнением*. Его особыми точками являются 0 , 1 и ∞ ; легко видеть, что каждая из них регулярна и соответствующие пары показателей имеют вид $(0, 1-c)$, $(0, c-a-b)$ и (a, b) соответственно.

Важность уравнения (8.01) вытекает, в частности, из следующей теоремы, доказательству которой посвящен этот параграф¹⁾.

Теорема 8.1. *Любое однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, особые точки которого, включая бесконечно удаленную, регулярны, причем их число не превосходит трех, может быть преобразовано в гипергеометрическое уравнение.*

8.2. Сначала мы построим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0,$$

имеющее регулярные особые точки в заданных различных конечных точках ξ , η и ζ с произвольно заданными парами показателей (α_1, α_2) , (β_1, β_2) и (γ_1, γ_2) соответственно²⁾.

Поскольку единственными возможными особыми точками (включая бесконечно удаленную) функций $f(z)$ и $g(z)$ являются полюсы, эти функции рациональны³⁾. Поэтому

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}, \quad g(z) = \frac{G(z)}{(z-\xi)^2(z-\eta)^2(z-\zeta)^2},$$

где $F(z)$ и $G(z)$ — многочлены. Если бесконечность является обычной точкой, то, как мы видели в § 6, функции $2z - z^2 f(z)$ и $z^4 g(z)$ должны быть в ней аналитичны. В силу этого функции $F(z)$ и $G(z)$ — квадратичны, а коэффициент перед z^2 в первой из них равен 2. Таким образом,

$$f = \frac{A}{z-\xi} + \frac{B}{z-\eta} + \frac{C}{z-\zeta}$$

и

$$(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)g(z) = \frac{D}{z-\xi} + \frac{E}{z-\eta} + \frac{F}{z-\zeta},$$

где

$$A + B + C = 2. \quad (8.02)$$

Чтобы выразить постоянные A, B, C, D, E и F через заданные показатели, мы обратимся сначала к определяющему уравнению для ξ , а именно:

$$\alpha(\alpha-1) + A\alpha + D(\xi-\eta)^{-1}(\xi-\zeta)^{-1} = 0,$$

откуда

$$A = 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad D = (\xi - \eta)(\xi - \zeta)\alpha_1\alpha_2.$$

¹⁾ Ср. также упр. 8.1 и 8.2.

²⁾ При этом автоматически рассматриваются и уравнения с менее чем тремя особыми точками, которые соответствуют тому, что мы выбираем значения $(0, 1)$ для одной или более пары показателей.

³⁾ См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, М., «Наука», 1968, гл. 7, § 3.

Аналогично,

$$\begin{aligned} B &= 1 - \beta_1 - \beta_2, & E &= (\eta - \xi)(\eta - \xi)\beta_1\beta_2, \\ C &= 1 - \gamma_1 - \gamma_2, & F &= (\xi - \xi)(\xi - \eta)\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

В силу условия (8.02) шесть показателей нельзя выбрать независимыми; они удовлетворяют соотношению

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \quad (8.03)$$

Искомое дифференциальное уравнение принимает теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z - \xi} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{z - \eta} + \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{z - \zeta} \right) \frac{dw}{dz} - \\ - \left\{ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(z - \xi)(\eta - \xi)} + \frac{\beta_1 \beta_2}{(z - \eta)(\xi - \zeta)} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(z - \zeta)(\xi - \eta)} \right\} \times \\ \times \frac{(\xi - \eta)(\eta - \zeta)(\xi - \zeta)}{(z - \xi)(z - \eta)(z - \zeta)} w = 0. \quad (8.04) \end{aligned}$$

Это уравнение называется уравнением *Папперитца* или *Римана*.

В обозначениях Римана уравнение (8.04) можно записать как

$$w = P \begin{Bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix}.$$

Особые точки указаны в верхней строке; порядок их расположения не существен. Под ними расположены столбцы соответствующих показателей, причем порядок в каждой паре также не имеет значения.

Тем же самым методом легко проверить, что явная форма уравнения

$$w = P \begin{Bmatrix} \xi & \infty & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix},$$

т. е. дифференциальное уравнение, имеющее регулярные особые точки в ξ , ζ и на бесконечности, записывается как

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z - \xi} + \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{z - \zeta} \right) \frac{dw}{dz} + \\ + \left\{ \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\xi - \zeta)}{z - \xi} + \beta_1 \beta_2 + \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\xi - \zeta)}{z - \zeta} \right\} \frac{w}{(z - \xi)(z - \zeta)} = 0, \quad (8.05) \end{aligned}$$

если снова выполнено условие (8.03). Легко видеть, уравнение (8.05) является предельной формой (8.04) при $\eta \rightarrow \infty$.

8.3. Теперь мы преобразуем уравнение (8.04), взяв новые переменные

$$t = \frac{(\xi - \eta)(z - \xi)}{(\xi - \xi)(z - \eta)}, \quad W = t^{-\alpha_1} (1 - t)^{-\gamma_1} w. \quad (8.06)$$

Первое из этих соотношений определяет дробно-линейное преобразование, которое взаимно однозначно отображает z -плоскость на t -плоскость.

Дифференциальное уравнение в переменных W и t также имеет второй порядок и линейно. Его особыми точками служат те, которые соответствуют $z = \xi$, η и ζ , т. е. $t = 0$, ∞ и 1 соответственно. Из § 6.1 следует, что эти новые особые точки регулярны (или, возможно, являются обыкновенными точками), а из второго соотношения в (8.06) вытекает, что новые пары показателей имеют вид

$$(0, \alpha_2 - \alpha_1), (\beta_1 + \alpha_1 + \gamma_1, \beta_2 + \alpha_1 + \gamma_1), (0, \gamma_2 - \gamma_1)$$

соответственно. Рассуждения § 8.2 показывают, что дифференциальное уравнение однозначно определяется указанием особых точек и значений (пяти) показателей. Следовательно, исходя из (8.05), мы можем сразу написать новое уравнение

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + \left(\frac{1 - \alpha_2 + \alpha_1}{t} + \frac{1 - \gamma_2 + \gamma_1}{t - 1} \right) \frac{dW}{dt} + \left(\frac{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1)}{t(t - 1)} \right) W = 0. \quad (8.07)$$

В силу (8.03) это уравнение имеет вид (8.01), где

$$a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad b = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1, \quad c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2.$$

Проведенное исследование включает и случай трех конечных особых точек. Аналогичным образом дифференциальное уравнение (8.05) можно преобразовать в (8.07) и, следовательно, в (8.01). Этим завершается доказательство теоремы 8.1.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Показать, что не существует однородных дифференциальных уравнений второго порядка, не имеющих ни одной особой точки.

8.2. Показать, что любое однородное дифференциальное уравнение второго порядка, не имеющее нерегулярных особых точек и содержащее одну или две регулярные особые точки, может быть решено в замкнутом виде и выражено через элементарные функции.

8.3. Доказать, что если $\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1/2$, то

$$P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 & z^2 \\ \frac{1}{2} & \beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 \\ \gamma_1 & 2\beta_1 & \gamma_1 & z \\ \gamma_2 & 2\beta_2 & \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad \{\text{Риман, 1857}\}.$$

8.4. Показать, что самое общее однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее регулярные особые точки в различных точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и не имеющее других особых точек, записывается в виде

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left\{ \sum \frac{1 - \alpha_s - \beta_s}{z - \xi_s} \right\} \frac{dw}{dz} + \left\{ \sum \frac{\alpha_s \beta_s}{(z - \xi_s)^2} + \sum \frac{\lambda_s}{z - \xi_s} \right\} w = 0,$$

где постоянные α_s , β_s и λ_s удовлетворяют условиям

$$\sum (\alpha_s + \beta_s) = n - 2,$$

$$\sum \lambda_s = \sum (\lambda_s \xi_s + \alpha_s \beta_s) = \sum (\lambda_s \xi_s^2 + 2\alpha_s \beta_s \xi_s) = 0. \quad [\text{Клейп, 1894}].$$

Суммирование всюду ведется от $s = 1$ до $s = n$.

§ 9. Гипергеометрическая функция

9.1. Решения в виде рядов уравнения (8.01), справедливые в окрестностях точек $z = 0$, 1 или ∞ , можно построить прямым применением методов §§ 4—6. В частности, оказывается, что решение, соответствующее показателю 0 в $z = 0$ и принимающее значение 1 при $z = 0$, имеет вид

$$F(a, b; c; z) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+s-1) b(b+1) \dots (b+s-1)}{c(c+1) \dots (c+s-1)} \frac{z^s}{s!} \quad (9.01)$$

при условии, что c не равно нулю или отрицательному целому числу. Этот ряд, очевидно, сходится при $|z| < 1$, как мы и ожидали, и называется *гипергеометрическим рядом*. Его сумма $F(a, b; c; z)$ называется *гипергеометрической функцией*.

Обозначение $F(a, b; c; z)$ является стандартным для главного решения гипергеометрического уравнения, но удобнее излагать последующие результаты в терминах функции

$$F(a, b; c; z) = F(a, b; c; z)/\Gamma(c), \quad (9.02)]$$

поскольку это приводит к меньшим ограничениям и более простым формулам. Большая часть результатов будет переформулирована для функции F . Из (9.01) и (9.02) имеем

$$F(a, b; c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{\Gamma(c+s)} \frac{z^s}{s!} \quad (|z| < 1), \quad (9.03)$$

где для краткости мы использовали обозначения *Похгаммера* $(a)_0 = 1$ и

$$(a)_s = a(a+1)(a+2) \dots (a+s-1) \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (9.04)$$

В отличие от $F(a, b; c; z)$, функция $\mathbf{F}(a, b; c; z)$ существует и удовлетворяет уравнению (8.01) при *всех* значениях a , b и c ; используя (9.03), легко проверить, что когда n — положительное

целое число или нуль,

$$\begin{aligned} F(a, b; -n; z) &= \\ &= (a)_{n+1} (b)_{n+1} z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z) = \\ &= (a)_{n+1} (b)_{n+1} z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z) / (n+1)!. \end{aligned} \quad (9.05)$$

Следовательно, при этих исключительных значениях функция $F(a, b; c; z)$ соответствует показателю $1-c$, а не 0.

Вне круга $|z| < 1$ функция $F(a, b; c; z)$ определяется с помощью аналитического продолжения. Результаты §§ 4—6 показывают, что если z -плоскость разрезана вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$, то особенностями функции $F(a, b; c; z)$ могут быть лишь точки ветвления (или полюсы) при $z = 1$ и $z = \infty$. Разрез выделяет главную ветвь $F(a, b; c; z)$. Другие ветви получаются в результате аналитического продолжения через разрез; для них $z = 0$ является в общем случае особой точкой.

9.2. Мы можем рассматривать $F(a, b; c; z)$ и как функцию a, b или c .

Теорема 9.1. Если значение z фиксировано и не равно 0, 1 или ∞ , то любая ветвь $F(a, b; c; z)$ является целой функцией каждого из параметров a, b и c .

Для главной ветви при $|z| < 1$ этот результат проверяется исходя из определения (9.03): существование мажорирующего ряда показывает, что ряд сходится равномерно в любой ограниченной области изменения комплексных значений a, b и c . Обобщение на $|z| \geq 1$ и другие ветви производится непосредственно с помощью теоремы 3.2; любая точка из единичного круга, отличная от начала координат, может быть выбрана в качестве z_0 в условии 4) этой теоремы. Точки $z = 0, 1$ и ∞ исключаются в формулировке окончательного результата, поскольку функция $F(a, b; c; z)$ может в них не существовать¹⁾.

9.3. Многие хорошо известные функции выражаются через гипергеометрическую функцию. Например, главная ветвь $(1-z)^{-a}$ является также главной ветвью $F(a, 1; 1; z)$. Другие примеры приведены ниже в упр. 9.1, 9.2 и 10.1.

Частный случай при $a = 1$ функции $(1-z)^{-a}$, приводящий к равенству

$$1 + z + z^2 + \dots = F(1, 1; 1; z),$$

указывает на происхождение названия гипергеометрическая.

9.4. Интегральное представление для $F(a, b; c; z)$ можно найти с помощью интеграла для бета-функции из главы 2, § 1.6. Предположим, что

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |z| < 1. \quad (9.06)$$

¹⁾ Для главной ветви точку $z = 0$ можно не исключать, так как $F(a, b; c; 0) = 1/\Gamma(c)$.

Используя символы Похгаммера (9.04), имеем

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{1}{\Gamma(b)} \sum_{s=0}^{\infty} z^s \frac{(a)_s}{s!} \frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \sum_{s=0}^{\infty} z^s \frac{(a)_s}{s!} \int_0^1 t^{b+s-1} (1-t)^{c-b-1} dt, \end{aligned} \quad (9.07)$$

где для t^{b+s-1} и $(1-t)^{c-b-1}$ берутся главные ветви.

Так как $|z| < 1$, мажорантная оценка показывает, что ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{s!} z^s t^{b+s-1} (1-t)^{c-b-1} \quad (9.08)$$

сходится равномерно в любом компактном t -интервале, содержащемся в $(0, 1)$. Используя условия (9.06) и вспоминая теорему 8.1 из главы 2, мы видим, что в (9.07) можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования¹⁾. Это приводит к искомому результату

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt. \quad (9.09)$$

Равенство (9.09) (полученное Эйлером), было установлено в предположении, что $|z| < 1$. Но интеграл в правой части как функция z сходится равномерно в любой компактной области, не содержащей точек интервала $[1, \infty)$. Следовательно, при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ интеграл (9.09) дает главное значение $F(a, b; c; z)$ всюду, исключая точки разреза $1 \leq z < \infty$. Все степенные функции в подынтегральном выражении имеют главные значения.

С помощью дальнейшего аналитического продолжения легко убедиться, что точки разреза можно включить в область справедливости представления (9.09), если $\operatorname{Re} a < 1$, но не в других случаях.

9.5. Чему равна сумма геометрического ряда в особой точке $z = 1$? Из главы 4, § 5 имеем

$$\frac{\Gamma(a+s) \Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s) s!} \sim \frac{1}{s^{c-a-b+1}} \quad (s \rightarrow \infty).$$

Поэтому сумма $F(a, b; c; 1)$ существует, если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Предположим на время, что $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ и $\operatorname{Re} a \leq 0$. Полагая $z \rightarrow 1$ внутри единичного круга, мы найдем, что правая

¹⁾ Можно видоизменить доказательство, полагая условие $\operatorname{Re} b \geq 1$ и $\operatorname{Re}(c-b) \geq 1$. Тогда ряд (9.08) сходится равномерно в $[0, 1]$ и поэтому может быть проинтегрирован почленно. Обобщение конечного результата на $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ достигается аналитическим продолжением по b и c .

часть равенства (9.09) стремится к

$$\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1} dt,$$

т. е. $\Gamma(c-a-b)/\{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\}$. По теореме Абеля о непрерывности степенного ряда¹⁾ это выражение равно сумме ряда при $z = 1$:

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (9.10)$$

Аналитическое продолжение по a , c и b снова показывает, что равенство (9.10) справедливо, когда $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, без каких-либо других ограничений. Эта важная формула получена Гауссом и чаще записывается в виде

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (9.11)$$

с дополнительным условием $c \neq 0, -1, -2, \dots$

УПРАЖНЕНИЯ

9.1 Показать, что при $|z| < 1$

$$\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z),$$

$$\ln\{(1+z)/(1-z)\} = 2zF(1/2, 1; 3/2; z^2),$$

$$\arcsin z = zF(1/2, 1/2; 3/2; z^2), \quad \operatorname{arctg} z = zF(1/2, 1; 3/2; -z^2).$$

9.2. Показать, что при $|k| < 1$ эллиптические интегралы

$$K(k^2) = \int_0^1 \frac{dt}{\{(1-t^2)(1-k^2t^2)\}^{1/2}}, \quad E(k^2) = \int_0^1 \frac{(1-k^2t^2)^{1/2}}{(1-t^2)^{1/2}} dt$$

можно записать как

$$K(k^2) = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad E(k^2) = \frac{1}{2}\pi F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

9.3. Показать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F(a, b; c; z) = (a)_n (b)_n F(a+n, b+n, c+n, z),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \{z^{a+n-1} F(a, b; c; z)\} = (a)_n z^{a-1} F(a+n, b; c; z).$$

¹⁾ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., «Наука», 1970, шп. 437, 456.

9.4¹⁾. Проверить, что

$$\begin{aligned} (c-a)F(a-1, b; c; z) + \{2a-c+(b-a)z\}F(a, b; c; z) + \\ + a(z-1)F(a+1, b; c; z) = 0, \\ (z-1)F(a, b; c-1; z) + \{c-1-(2c-a-b-1)z\}F(a, b; c; z) + \\ + (c-a)(c-b)zF(a, b; c+1; z) = 0. \end{aligned}$$

9.5²⁾. Допустим, что z — любая точка комплексной плоскости, не принадлежащая интервалу $[1, \infty)$, и напишем

$$I = \int_{\alpha}^{(1+, 0+, 1-, 0-)} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt.$$

Путь интегрирования начинается в произвольной точке α из интервала $(0, 1)$, обходит интервал $(\alpha, 1]$ один раз в положительном направлении, возвращается в α , затем обходит $[0, \alpha)$ один раз в положительном направлении, возвращается в α и т. д. Точка $1/z$ находится вне всех петель. Предположим также, что сомножители в подынтегральном выражении непрерывны на пути интегрирования и принимают в начальной точке главные значения. Докажите результат Похгаммера, который установил, что главная ветвь $F(a, b; c; z)$ определяется формулой

$$F(a, b; c; z) = -e^{-c\pi i} \Gamma(1-b) \Gamma(1+b-c) I / (4\pi^2),$$

если ни b , ни $c-b$ не равны положительному целому числу.

Можно ли этот результат перенести на другие ветви $F(a, b; c; z)$?

9.6³⁾. Пусть a, b и z фиксированы и $z \notin [1, \infty)$. Применяя к (9.09) методы главы 4, §§ 3 и 5.2, показать, что

$$F(a, b; c; z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(b)_s q_s}{\Gamma(c-b) e^{s\pi i}}$$

при $c \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg c| \leq (\pi/2) - \delta (< \pi/2)$, где $q_0 = 1$, а следующие коэффициенты определяются разложением

$$e^{\tau} (e^{\tau} - 1)^{b-1} (1-z+ze^{-\tau})^{-a} = \sum_{s=0}^{\infty} q_s \tau^{s+b-1}.$$

Показать также, что при $\operatorname{Re} z \leq 1/2$ область справедливости разложения можно расширить до $|\arg c| \leq \pi - \delta (< \pi)$.

9.7. Пусть a, b, c и z фиксированы и $z \in (-\infty, 1)$. Показать, что

$$F(a+\lambda, b+\lambda; c+\lambda; z) \sim \frac{(1-z)^{c-a-b-\lambda}}{\Gamma(b+\lambda)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c-b)_s q_s}{\lambda^{c-b+s}}$$

¹⁾ Эти два тождества принадлежат к пятнадцати линейным соотношениям Гаусса, связывающим $F(a, b; c; z)$ с двумя смежными гипергеометрическими функциями, т. е. с такими, которые получаются из $F(a, b; c; z)$ прибавлением ± 1 к одному из параметров.

²⁾ Ср. главу 2, упр. 1.6.

³⁾ В упр. 9.6 и 9.7 все функции принимают главные значения. Дальнейшие результаты этого типа можно найти у Ватсона (1918с) и Люка (1969а глава VII). На стр. 299 работы Ватсона содержится ошибка: $\log(1-x^{-1})$ следует заменить на $-\log(1-x^{-1})$. Это отразится на областях справедливости разложения.

при $\lambda \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg \lambda| \leq (\pi/2) - \delta (< \pi/2)$, где $q_0 = 1$, а следующие коэффициенты определяются разложением

$$e^{-b\tau} (1 - e^{-\tau})^{c-b-1} (1 - z + ze^{-\tau})^{a-c} = \sum_{s=0}^{\infty} g_s \tau^{s+c-b-1}.$$

Применяя теорему 6.1 из главы 4, показать также, что этот результат можно обобщить на комплексные значения z , если $\operatorname{Re} z \leq 1$, $r \neq 1$ и $\arg \lambda = 0$.

§ 10. Другие решения гипергеометрического уравнения

10.1. В § 9.4 мы вывели интегральную формулу для $F(a, b; c; z)$, которая позволила осуществить аналитическое продолжение этой функции в z -плоскость, разрезанную вдоль интервала $[1, \infty)$, при некоторых ограничениях на параметры. В этом параграфе мы построим дальнейшие аналитические продолжения, выражая $F(a, b; c; z)$ через другие решения гипергеометрического уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\} \frac{dw}{dz} - abw = 0. \quad (10.01)$$

Сначала мы рассмотрим полное решение этого уравнения в окрестности начала координат.

Решение $F(a, b; c; z)$ соответствует показателю 0 при условии $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Метод § 4 показывает, что решение, соответствующее другому показателю в точке $z=0$, имеет вид $z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z)$ при условии $c \neq 2, 3, 4, \dots$. Иногда более удобно рассматривать в качестве второго решения функцию

$$G(a, b; c; z) = z^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z),$$

поскольку она существует при всех c .

Когда c не равно целому числу или нулю, предельные выражения для F , G и их производных даются формулами

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(c)}, & \frac{\partial}{\partial z} F(a, b; c; z) &\rightarrow \frac{ab}{\Gamma(c+1)}, \\ G(a, b; c; z) &\sim \frac{z^{1-c}}{\Gamma(2-c)}, & \frac{\partial}{\partial z} G(a, b; c; z) &\sim \frac{z^{-c}}{\Gamma(1-c)}. \end{aligned}$$

Поэтому вронскан функций $F(a, b; c; z)$ и $G(a, b; c; z)$ имеет вид

$$\mathscr{W}(F, G) = \frac{\sin \pi c}{\pi} z^{-c} (1-z)^{c-a-b-1}$$

(ср. (1.10)). Аналитическое продолжение непосредственно распространяет это тождество на все значения c . Из этого результа-

та и теоремы 1.2 следует, что F и G линейно независимы, исключая случаи, когда c равно целому числу или нулю. В этих исключительных случаях можно методом Фробениуса (§ 5.3) построить независимое решение в виде ряда, в которое входит логарифм; см. ниже упр. 10.3.

По терминологии § 7 функции $F(a, b; c; z)$ и $G(a, b; c; z)$ являются подчиненными в точке $z = 0$, когда c — целое число или нуль. Если $\operatorname{Re} c > 1$, то $F(a, b; c; z)$ — подчиненное, а $G(a, b; c; z)$ — доминирующее решение; они меняются ролями при $\operatorname{Re} c < 1$; ни одно из них не доминирует над другим при $\operatorname{Re} c = 1$.

10.2. В обозначениях Римана гипергеометрическое уравнение (10.01) имеет вид

$$w = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} z \right\}. \quad (10.02)$$

Преобразование $w = (1-z)^p W$ уменьшает показатели в точке $z = 1$ на p и на столько же увеличивает показатели на бесконечности. Если положить $p = c-a-b$, то новое уравнение снова имеет нулевой показатель в точке $z = 1$:

$$W = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & a+b-c & c-b \\ 1-c & 0 & c-a \end{array} z \right\}.$$

Если $\operatorname{Re} c > 1$, подчиненное решение последнего уравнения в начале координат имеет вид

$$W = F(c-a, c-b; c; z).$$

Его отношение к соответствующему подчиненному решению уравнения (10.02) пропорционально $(1-z)^{a+b-c}$, а коэффициент пропорциональности можно вычислить, положив $z = 0$. Тогда

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z). \quad (10.03)$$

В этом равенстве главные ветви соответствуют друг другу; единственный необходимый разрез проходит вдоль интервала $[1, \infty)$. Кроме того, ограничение $\operatorname{Re} c > 1$ можно снять с помощью аналитического продолжения.

10.3. Рассмотрим теперь преобразования

$$w = (1-z)^{-a} W, \quad t = \frac{z}{z-1}.$$

Первое из них изменяет показатели в 1 и ∞ ; в частности, оно обращает один из показателей в точке ∞ в нуль. Второе преобразование переставляет особенности в 1 и ∞ . Поэтому новое урав-

нение имеет вид

$$W = P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1-a & c-b & b-a \end{Bmatrix}. \quad (10.04)$$

Подчиненное решение уравнения (10.02) в $z=0$ снова должно отличаться лишь множителем от подчиненного решения (10.04) в $t=0$. Следовательно, мы получаем

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b; c; z/(z-1)), \quad (10.05)$$

причем снова без каких-либо ограничений на параметры.

Аналогичным образом или используя (10.03) можно вывести соотношение

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F(b, c-a; c; z/(z-1)). \quad (10.06)$$

Когда z изменяется от 1 до $+\infty$, функция $z/(z-1)$ изменяется от $+\infty$ до 1, и поэтому в каждом из последних двух равенств главные ветви соответствуют друг другу. Гипергеометрические ряды для функций в правых частях сходятся при $|z/(z-1)| < 1$, т. е. когда $\operatorname{Re} z < 1/2$. Следовательно, эти соотношения осуществляют аналитическое продолжение $F(a, b; c; z)$ в эту полуплоскость.

Если $c \neq 0, -1, -2$, то символ F в (10.03), (10.05) и (10.06) можно заменить на F .

10.4. Рассмотрим теперь решения в виде рядов для гипергеометрического уравнения в окрестности особой точки $z=1$. Используя метод § 4 или, еще проще, применяя преобразование $z=1-t$, мы видим, что эти решения имеют вид

$$F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) \quad (10.07)$$

$$\text{и} \quad (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z). \quad (10.08)$$

Они независимы, исключая случай, когда $a+b-c$ — целое число или нуль.

Так как главная ветвь $F(a, b; c; z)$ определяется с помощью разреза вдоль действительной оси от $z=1$ до $z=+\infty$, то главные ветви функций F в (10.07) и (10.08) выделяются разрезом от $z=0$ до $z=-\infty$. Если, кроме того, предположить, что $(1-z)^{c-a-b}$ имеет главное значение, то необходим также разрез от 1 до $+\infty$.

В плоскости с двумя разрезами три решения $F(a, b; c; z)$ (10.07) и (10.08) связаны соотношением

$$F(a, b; c; z) = AF(a, b; 1+a+b-c; 1-z) + B(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z).$$

Чтобы найти коэффициенты A и B , предположим временно, что

$$\operatorname{Re}(a+b) < \operatorname{Re} c < 1, \quad (10.09)$$

так что ряды для

$$F(a, b; c; 1), \quad F(a, b; 1+a+b-c; 1), \\ F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1)$$

сходятся; сравните § 9.5.

Полагая $z \rightarrow 1-0$ и используя (9.10) и теорему Абеля о непрерывности степенного ряда, мы получаем

$$A = \Gamma(1+a+b-c) F(a, b; c; 1) = \\ = \frac{\pi}{\sin\{\pi(c-a-b)\} \Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}. \quad (10.10)$$

Аналогично, полагая $z \rightarrow +0$, получим

$$\frac{1}{\Gamma(c)} = AF(a, b; 1+a+b-c; 1) + \\ + BF(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1).$$

Используя равенства (9.10), (10.10) и еще раз формулу отражения для гамма-функции, мы приходим к формуле

$$B = - \frac{\pi}{\sin\{\pi(c-a-b)\} \Gamma(a) \Gamma(b)}.$$

В соответствии с этим искомая формула связи принимает вид

$$\frac{\sin\{\pi(c-a-b)\}}{\pi} F(a, b; c; z) = \\ = \frac{1}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) - \\ - \frac{(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z), \quad (10.11)$$

причем каждая функция принимает главное значение в z -плоскости, разрезанной вдоль $(-\infty, 0]$ и $[1, \infty)$. Условия (10.09) можно теперь снять, используя аналитическое продолжение.

Исключая случай, когда выражение $a+b-c$ равно целому числу или нулю, равенство (10.11) утверждает, что $F(a, b; c; z)$ имеет точку ветвления при $z = 1$. Для функции F формула (10.11) принимает вид

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) + \\ + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z), \quad (10.12)$$

при условии, что $a+b-c$ не равно целому числу или нулю, а c не равно отрицательному целому числу или нулю.

10.5. Положим в (10.11) $z = (t-1)/t$. Тогда, используя (10.05), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sin \{\pi(c-a-b)\}}{\pi} t^a F(a, c-b; c; 1-t) = \\ = \frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; 1+a+b-c; t^{-1}) - \\ - \frac{t^{a+b-c}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; 1-c-a-b; t^{-1}). \end{aligned}$$

Замена b на $1+a-c$, c на $1+a+b-c$ и t на z дает

$$\begin{aligned} \frac{\sin \{\pi(b-a)\}}{\pi} F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) = \\ = \frac{z^{-a}}{\Gamma(b)\Gamma(1+b-c)} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) - \\ - \frac{z^{-b}}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)} F(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}). \quad (10.13) \end{aligned}$$

Эта формула связывает решение в виде ряда для уравнения (10.01) в $z = 1$ с решениями в виде рядов в $z = \infty$. Она справедлива без ограничений на параметры, и главные ветви соответствуют друг другу; в совокупности эти ветви приводят к разрезу вдоль $(-\infty, 1]$.

10.6. Последняя формула, которую мы установим в этом параграфе, связывает $F(a, b; c; z)$ с решением в виде ряда в точке $z = \infty$:

$$F(a, b; c; z) = A(-z)^{-a} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) + \\ + B(-z)^{-b} F(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}). \quad (10.14)$$

Необходимый для выделения главных ветвей разрез идет теперь от 0 до $+\infty$.

Чтобы найти постоянные A и B , заменим c и z в (10.13) на $1+a+b-c$ и $1-z$ соответственно и затем разложим правую часть по убывающим степеням z . Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sin \{\pi(b-a)\}}{\pi} F(a, b; c; z) = \\ = \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(1+a-b)} \left(1 + \frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \dots\right) - \\ - \frac{(-z)^{-b}}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)\Gamma(1+b-a)} \left(1 + \frac{\mu_1}{z} + \frac{\mu_2}{z^2} + \dots\right), \end{aligned}$$

где коэффициенты λ_i и μ_i не зависят от z . Сравнивая это выражение с разложением по убывающим степеням z в правой части (10.14), мы непосредственно находим значения A и B и,

следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \{\pi (b-a)\}}{\pi} F(a, b; c; z) = \\ & = \frac{(-z)^{-a}}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) - \\ & - \frac{(-z)^{-b}}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} F(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}). \quad (10.15) \end{aligned}$$

Здесь снова все ограничения на параметры в окончательном результате устраняются с помощью аналитического продолжения.

Для функций F имеем

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) = & \\ & - \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) + \\ & + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}), \quad (10.16) \end{aligned}$$

при условии, что $c \neq 0, -1, -2$ и разность $a-b$ не равна целому числу или нулю.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Показать, что многочлены Якоби можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \alpha+1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) = \\ &= (-1)^n \binom{n+\beta}{n} F\left(-n, \alpha+\beta+n+1; \beta+1; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right). \end{aligned}$$

10.2¹⁾. Показать, что

$$F(a, b; a+b+1/2; 4z-4z^2) = F(2a, 2b; a+b+1/2; z).$$

10.3. Пусть m — любое положительное целое число. Используя метод § 5.3 и рассматривая предельное значение выражения

$$\frac{1}{c-1+m} \left\{ \frac{F(a, b; c; z)}{\Gamma(1-a) \Gamma(1-b)} - \frac{G(a, b; c; z)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \right\}$$

при $c \rightarrow 1-m$, доказать, что второе решение гипергеометрического

¹⁾ Это — пример одного из возможных *квадратичных преобразований* гипергеометрической функции.

уравнения в случае $c = 1 - m$ имеет вид

$$z^m \left\{ \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} \lambda_{m,-s} \frac{(s-1)!}{z^s} + \lambda_{m,0} {}_pF(a+m, b+m; 1+m; z) \ln z + \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{m,s} \mu_{m,s} \frac{z^s}{s!} \right\},$$

где

$$\lambda_{m,s} = \frac{1}{\Gamma(1-a-m-s) \Gamma(1-b-m-s) (m+s)!},$$

$$\mu_{m,s} = \psi(1-a-m-s) + \psi(1-b-m-s) - \psi(1+m+s) - \psi(1+s).$$

§ 11. Обобщенные гипергеометрические функции

11.1. Если ввести оператор

$$\vartheta = z \frac{d}{dz},$$

то гипергеометрическое уравнение (10.01) принимает вид

$$\vartheta(\vartheta+c-1)w = z(\vartheta+a)(\vartheta+b)w, \quad (11.01)$$

Обобщенное гипергеометрическое уравнение определяется формулой

$$\vartheta(\vartheta+c_1-1)(\vartheta+c_2-1) \dots (\vartheta+c_q-1)w = z(\vartheta+a_1)(\vartheta+a_2) \dots (\vartheta+a_p)w, \quad (11.02)$$

где c_s и a_s — постоянные. Это — линейное дифференциальное уравнение порядка $\max(p, q+1)$. Используя обозначения Похгаммера (§ 9.1), мы легко найдем, что решение с нулевым показателем в начале координат имеет вид

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; c_1, c_2, \dots, c_q; z) = \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_1)_s (a_2)_s \dots (a_p)_s}{(c_1)_s (c_2)_s \dots (c_q)_s} \frac{z^s}{s!}, \end{aligned} \quad (11.03)$$

если ни одно из c_s не равно отрицательному целому числу или нулю, и ряд сходится. Для краткости эта функция обозначается через ${}_pF_q(z)$.

Когда $p \leq q$, ряд (11.03) сходится при всех z , и функция ${}_pF_q(z)$ — целая. В главе 7 мы подробно рассмотрим случай $p = q = 1$.

Когда $p = q+1$, радиус сходимости ряда (11.03) равен единице. Вне единичного круга ${}_pF_q(z)$ определяется с помощью аналитического продолжения. При введенных обозначениях функция

$F(a, b; c; z)$, рассмотренная в предыдущих параграфах, имеет вид ${}_2F_1(a, b; c; z)$.

Наконец, когда $p > q+1$, обобщенный гипергеометрический ряд (11.03) расходится при ненулевых значениях z , если только хотя бы один из параметров a_1, a_2, \dots, a_p не равен нулю или отрицательному целому числу. За исключением этих случаев ряд не определяет решения дифференциального уравнения¹⁾.

УПРАЖНЕНИЕ

11.1. Показать, что если w удовлетворяет дифференциальному уравнению $w'' + fw' + gw = 0$, то произведение любых двух решений удовлетворяет уравнению

$$W''' + 3fW'' + (2f^2 + f' + 4g)W' + (4fg + 2g')W = 0.$$

Исходя из этого, проверить тождество

$$\left\{ F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; z\right) \right\}^2 = {}_3F_2\left(2a, a+b, 2b; a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b; z\right)$$

при условии, что $2a+2b$ не равно нулю или отрицательному целому числу [Клаузен, 1828].

§ 12. Присоединенное уравнение Лежандра

12.1. В главе 2, § 7.3, было показано, что многочлены Лежандра $P_n(z)$ являются решениями уравнения Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0. \quad (12.01)$$

Это уравнение — частный случай *присоединенного уравнения Лежандра*

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{v(v+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}w = 0, \quad (12.02)$$

которое играет важную роль в различных областях прикладной математики, особенно при решении уравнения Лапласа в сферических полярных или сфероидальных координатах.

В большинстве приложений параметры v и μ — целые числа, но мы почти во всех рассуждениях будем считать, что они изменяются во всей комплексной плоскости. Таким образом, мы сможем использовать для простого вывода основных формул мощный аппарат аналитического продолжения.

Сначала заметим, что дифференциальное уравнение (12.02) не меняется при замене μ на $-\mu$, v на $-v-1$ или z на $-z$. Поэтому с точки зрения отыскания общего решения достаточно по-

¹⁾ Начало координат является иррегулярной особой точкой.

строить численно удовлетворительное множество решений (§ 7) в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ при $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ и $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$. Хотя налагать такие условия на переменную и параметры не нужно, нашей первоначальной целью будет рассмотрение этих областей.

12.2. Особые точки уравнения (12.02) находятся в $z = 1$, -1 и ∞ ; легко видеть, что все они регулярны. В обозначениях Римана (12.02) принимает вид

$$w = P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & -1 \\ \mu/2 & \nu+1 & \mu/2 \\ -\mu/2 & -\nu & -\mu/2 \end{array} \right\} z. \quad (12.03)$$

Из § 12.1 следует, что важными решениями этого уравнения являются: 1) решение, подчиненное в $z = 1$ при $\operatorname{Re} \mu > 0$ или $\mu = 0$; 2) решение, подчиненное в $z = \infty$ при $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ или $\nu = -1/2$. Эти решения обозначаются соответственно через $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ при условии, что выбраны подходящие нормирующие множители.

Преобразование уравнения (12.03) к гипергеометрической форме дает

$$w = \frac{(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \nu+1 & \mu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{array} \right\} (1-z)/2.$$

Функция $P_v^{-\mu}(z)$ определяется как решение вида

$$P_v^{-\mu}(z) = \frac{(z-1)^{\mu/2}}{(z+1)^{\mu/2}} F\left(\nu+1, -\nu; \mu+1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right). \quad (12.04)$$

Выбор ветви обсуждается ниже. В силу (10.03) это определение эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} P_v^{-\mu}(z) = \\ = 2^{-\mu} (z-1)^{\mu/2} (z+1)^{\mu/2} F\left(\mu-\nu, \nu+\mu+1; \mu+1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right). \end{aligned} \quad (12.05)$$

Далее, исходя из решения

$$(-z)^{-a} F(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1})$$

гипергеометрического уравнения (§ 10.6), мы вводим определения

$$\begin{aligned} Q_v^{\mu}(z) = 2^{\nu} \Gamma(\nu+1) \frac{(z-1)^{(\mu/2)-\nu-1}}{(z+1)^{\mu/2}} \times \\ \times F(\nu+1, \nu-\mu+1; 2\nu+2; 2/(1-z)); \end{aligned} \quad (12.06)$$

это равенство эквивалентно равенству

$$Q_v^{\mu}(z) = 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) \frac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{(\mu/2)+\nu+1}} \times \\ \times F(\nu + 1, \nu + \mu + 1; 2\nu + 2; 2/(1-z)). \quad (12.07)$$

Множители 2^{ν} и $\Gamma(\nu + 1)$ введены для удобства; без последнего из них функция $Q_v^{\mu}(z)$ обладала бы нежелательными свойствами, обращаясь тождественно в нуль, когда ν — отрицательное целое число (ср. (9.05)). В силу теоремы 3.2 правая часть (12.06) или (12.07) стремится к конечному пределу, когда ν стремится к отрицательному целому числу, и предельное значение удовлетворяет уравнению (12.02)¹⁾.

Обе функции, $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$, существуют при всех значениях ν , μ и z , исключая, возможно, особые точки $z = \pm 1$ и ∞ . Как функции z они многозначны с точками ветвления в $z = \pm 1$ и ∞ . Главные ветви обоих решений выделяются введением разреза вдоль действительной оси от $z = -\infty$ до $z = 1$ и выбором главного значения для каждой функции, входящей в формулы от (12.04) до (12.07).

Следует отметить, что в разрезанной таким образом z -плоскости отношение главных значений функции $(z-1)^{\mu/2}$ и $(z+1)^{\mu/2}$ в (12.04) можно заменить главным значением функции $\{(z-1)/(z+1)\}^{\mu/2}$, поскольку $\arg(z-1)$ и $\arg(z+1)$ имеют одни и тот же знак. С другой стороны, если сомножители $(z-1)^{\mu/2}(z+1)^{\mu/2}$ в (12.05) объединить в $(z^2-1)^{\mu/2}$, то для главной ветви $P_v^{-\mu}(z)$ правильным является выбор той ветви, для которой функция $(z^2-1)^{\mu/2}$ положительна при $z > 1$ и непрерывна в z -плоскости, разрезанной вдоль интервала $\{-\infty, 1\}$.

Читатель легко проверит, что в левой полуплоскости эта ветвь не является главной для $(z^2-1)^{\mu/2}$. Везде в оставшейся части параграфа и в §§ 13 и 14, где появляются нецелые степени z^2-1 , будет подразумеваться, что ветвь выбирается указанным образом.

Для фиксированного z (отличного от ± 1 и ∞) каждая ветвь $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ является целой функцией каждого из параметров ν и μ .

Это следует из соответствующего свойства функций F (теорема 9.1) и, в случае $Q_v^{\mu}(z)$, из теоремы 3.2.

Свойства 1) и 2), сформулированные в начале этого пункта, легко проверить, воспользовавшись определениями (12.04) и

¹⁾ Применяя теорему 3.2, следует в качестве точки z_0 в условии 4) взять любую фиксированную конечную точку из области $|z-1| > 2$.

(12.06). Эти свойства имеют вид

$$P_v^{-\mu}(z) \sim \frac{(z-1)^{\mu/2}}{2^{\mu/2} \Gamma(\mu+1)} \quad (z \rightarrow 1, \mu \neq -1, -2, -3, \dots) \quad (12.08)$$

и

$$Q_v^{\mu}(z) \sim \frac{\pi^{1/2}}{2^{v+1} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) z^{v+1}} \quad \left(z \rightarrow \infty, v \neq -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \dots\right), \quad (12.09)$$

причем в обеих частях соотношения выбираются главные значения.

12.3. Чтобы удостовериться, что $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ образуют численно удовлетворительную пару решений присоединенного уравнения Лежандра в правой половине z -плоскости, нам нужно выяснить поведение первой из функций при $z \rightarrow \infty$ и второй при $z \rightarrow 1$. В качестве предварительного шага мы найдем и перепишем для этих функций формулы связи, введенные в § 10 для гипергеометрических функций.

Так как присоединенное уравнение Лежандра не изменяется при замене μ на $-\mu$ или v на $-v-1$, каждая из восьми функций $P_v^{-\mu}(z)$, $P_{-v-1}^{-\mu}(z)$, $Q_v^{\mu}(z)$, $Q_{-v-1}^{\mu}(z)$ является решением. Однако только четыре из этих решений отличны друг от друга, поскольку из (12.04), (12.06) и (12.07) непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} P_{-v-1}^{-\mu}(z) &= P_v^{-\mu}(z), & P_{-v-1}^{\mu}(z) &= P_v^{\mu}(z), \\ Q_v^{\mu}(z) &= Q_v^{-\mu}(z), & Q_{-v-1}^{-\mu}(z) &= Q_{-v-1}^{\mu}(z). \end{aligned} \quad (12.10)$$

Первая формула связи получается из (10.15), если положить $a = v+1$, $b = v+\mu+1$, $c = 2v+2$, и заменить z на $2/(1-z)$. Это приводит к соотношению

$$\frac{2 \sin \mu \pi}{\pi} Q_v^{\mu}(z) = \frac{P_v^{\mu}(z)}{\Gamma(v+\mu+1)} - \frac{P_v^{-\mu}(z)}{\Gamma(v-\mu+1)}. \quad (12.11)$$

Далее, в (10.15) мы можем подставить $a = v+1$, $b = -v$, $c = \mu+1$ и заменить z на $(1-z)/2$. После этого, используя (12.10), мы приходим к равенству

$$\cos \nu \pi P_v^{-\mu}(z) = \frac{Q_{-v-1}^{\mu}(z)}{\Gamma(v+\mu+1)} - \frac{Q_v^{\mu}(z)}{\Gamma(\mu-v)}. \quad (12.12)$$

Из этих двух формул и (12.10) вытекают остальные формулы связи

$$\frac{2 \sin \mu \pi}{\pi} Q_{-v-1}^{\mu}(z) = \frac{P_v^{\mu}(z)}{\Gamma(\mu-v)} - \frac{P_v^{-\mu}(z)}{\Gamma(-v-\mu)}, \quad (12.13)$$

и

$$\cos \nu \pi P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{Q_{-\nu-1}^{\mu}(z)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} - \frac{Q_{\nu}^{\mu}(z)}{\Gamma(-\nu-\mu)}. \quad (12.14)$$

12.4. Теперь мы установим главный результат этого параграфа, касающийся присоединенного уравнения Лежандра.

Теорема 12.1. Если $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$, $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ и z изменяется в правой полуплоскости, то главные значения функций $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ и $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ образуют численно удовлетворительную пару решений в смысле § 7.

Дифференцирование соотношения (12.05) дает

$$\frac{dP_{\nu}^{-\mu}(z)}{dz} \sim \frac{(z-1)^{(\mu/2)-1}}{2^{(\mu/2)+1}\Gamma(\mu)} \quad (z \rightarrow 1, \mu \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Из этого результата и формулы (12.08) вытекает, что

$$\mathscr{W}\{P_{\nu}^{-\mu}(z), P_{\nu}^{\mu}(z)\} \sim -\frac{\sin \mu \pi}{\pi(z-1)}$$

($z \rightarrow 1$, μ — нецелое число).

Из (1.10) следует, что вронскиан любой пары решений присоединенного уравнения Лежандра имеет вид $C/(z^2-1)$, где C не зависит от z . Поэтому

$$\mathscr{W}\{P_{\nu}^{-\mu}(z), P_{\nu}^{\mu}(z)\} = -\frac{2\sin \mu \pi}{\pi(z^2-1)}, \quad (12.15)$$

причем аналитическое продолжение устраняет все ограничения на μ .

Подставляя в последнее соотношение выражение для $P_{\nu}^{\mu}(z)$ из (12.11), мы приходим к формуле

$$\mathscr{W}\{P_{\nu}^{-\mu}(z), Q_{\nu}^{\mu}(z)\} = -\frac{1}{\Gamma(\nu+\mu+1)(z^2-1)}. \quad (12.16)$$

Следовательно, в силу теоремы 1.2, функции $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ и $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\nu+\mu$ — отрицательное целое число, т. е. в случае, который в доказываемой теореме места не имеет.

Если $\operatorname{Re} \mu > 0$ или $\mu = 0$, то $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ — подчиненное решение в $z = 1$. Следовательно, при этих условиях решение $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ должно быть доминирующим. Аналогично, если $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ или $\nu = -1/2$, то на бесконечности решение $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ — подчиненное, а $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ — доминирующее. Остаются два следующих случая: 1) $\operatorname{Re} \mu = 0$ и $\operatorname{Im} \mu \neq 0$; 2) $\operatorname{Re} \nu = -1/2$, $\operatorname{Im} \nu \neq 0$. В случае 1) в $z = 1$ нет ни подчиненного, ни доминирующего решения, а в случае 2) аналогичное утверждение справедливо при $z = \infty$.

Поскольку решения $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ линейно независимы при сформулированных условиях, они снова образуют численно удовлетворительную пару (§ 7.2). Доказательство закончено.

12.5. Важность теоремы 12.1 заключается в том, что для представления общего решения присоединенного уравнения Лежандра с помощью числовых таблиц, вычислительных алгоритмов или асимптотических разложений для больших значений параметров достаточно ограничиться рассмотрением $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ при

$$\operatorname{Re} v \geq -1/2, \quad \operatorname{Re} \mu \geq 0, \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (12.17)$$

При других значениях параметров и переменной можно воспользоваться формулами связи и свести задачу к указанному выше случаю.

Следует, возможно, подчеркнуть, что если условия (12.17) нарушены, то функции $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$, как правило, более не образуют удовлетворительную пару, независимо от того, являются они линейно независимыми или нет. Например, если $\operatorname{Re} \mu < 0$, а числа μ и $v - \mu$ отличны от отрицательного целого числа, то оба решения, $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$, доминируют при $z = 1$. Это вызвано тем, что подчиненным решением при этих условиях является $P_v^{\mu}(z)$, а из (12.15) и (12.16) (где μ заменено на $-\mu$) следует, что функции $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ линейно независимы от $P_v^{\mu}(z)$.

12.6. Представляет интерес найти фактические предельные выражения для функций $P_v^{-\mu}(z)$ и $Q_v^{\mu}(z)$ при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow 1$ соответственно.

Из (12.09) и (12.12) мы получаем, что

$$P_v^{-\mu}(z) \sim \frac{\Gamma(v+1/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(v+\mu+1)} (2z)^v \quad (z \rightarrow \infty), \quad (12.18)$$

если $\operatorname{Re} v > -1/2$, $v+\mu$ не равно отрицательному целому числу, а $v+1/2$ не равно положительному целому числу. Последнее из ограничений можно снять, воспользовавшись формулой Коши

$$\varphi(n-1/2, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(v, z)}{v - n + 1/2} dv,$$

где n — положительное целое число,

$$\varphi(v, z) \equiv \frac{\pi^{1/2} \Gamma(v+\mu+1)}{\Gamma(v+1/2) (2z)^v} P_v^{-\mu}(z),$$

а \mathcal{C} — окружность $|v - n + 1/2| = \delta$; значение δ произвольно. По предположению, сумма $n + (1/2) + \mu$ не равна отрицательному целому числу или нулю; следовательно, внутри \mathcal{C} не содержится особенностей функции $\Gamma(v+\mu+1)$, если δ достаточно мало. Из (12.18) следует, что на \mathcal{C} справедливо предельное

соотношение $\varphi(v, z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$; кроме того, легко видеть, что оно равномерно относительно v . Поэтому $\varphi(n-1/2, z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, что и утверждалось.

Далее, в случае $v = -1/2$ мы находим, разлагая правую часть (12.12) в ряд по степеням $v+1/2$, что

$$P_{-1/2}^{-\mu}(z) = -\frac{2}{\pi \Gamma(\mu+1/2)} \left\{ \left[\frac{\partial Q_v^{\mu}(z)}{\partial v} \right]_{v=-1/2} + \psi(\mu+1/2) Q_{-1/2}^{\mu}(z) \right\}, \quad (12.19)$$

причем если $\mu-1/2$ — отрицательное целое число, то вместо правой части рассматривается ее предельная форма. Правую часть (12.06) можно разложить в сходящийся ряд по степеням $2/(1-z)$. Дифференцируя главные члены по v , полагая $v = -1/2$ и подставляя результат в (12.19), мы приходим к соотношению:

$$P_{-1/2}^{\mu}(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\mu+1/2)} \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \ln z$$

$$(z \rightarrow \infty, \mu \neq -1/2, -3/5, -5/2, \dots). \quad (12.20)$$

Аналогичным образом можно проверить, что

$$Q_v^{\mu}(z) \sim \frac{2^{(\mu/2)-1} \Gamma(\mu)}{\Gamma(v+\mu+1)} \frac{1}{(z-1)^{\mu/2}}$$

$$(z \rightarrow 1, \operatorname{Re} \mu > 0, v+\mu \neq -1, -2, -3, \dots), \quad (12.21)$$

$$Q_v^0(z) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left\{ \left[\frac{\partial P_v^{\mu}(z)}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} - \psi(v+1) P_v^0(z) \right\} \quad (12.22)$$

и

$$Q_v^0(z) \sim -\frac{\ln(z-1)}{2\Gamma(v+1)} \quad (z \rightarrow 1, v \neq -1, -2, -3, \dots). \quad (12.23)$$

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Доказать, что

$$Q_v^{\mu}(z) = \pi^{1/2} 2^{-v-1} z^{-v-\mu-1} (z^2-1)^{\mu/2} F\left(\frac{1}{2}, v+\frac{1}{2}, \mu+1, \frac{1}{2}, v+\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}; v+\frac{3}{2}; z^{-2}\right).$$

12.2. Доказать формулу Уиппла:

$$Q_v^{\mu}(z) = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2} (z^2-1)^{-1/4} P_{-\mu-1/2}^{-v-1/2}\{z(z^2-1)^{-1/2}\}.$$

12.3. Проверить, что

$$P_v^{-1/2}(\operatorname{ch} \xi) = \left(\frac{2}{\pi \operatorname{sh} \xi} \right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} \{(\nu + 1/2) \xi\}}{\nu + 1/2},$$

$$Q_v^{1/2}(\operatorname{ch} \xi) = \left(\frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \xi} \right)^{1/2} \frac{\exp \{-(\nu + 1/2) \xi\}}{\Gamma(\nu + 3/2)}.$$

$$P_v^{1/2}(\operatorname{ch} \xi) = \left(\frac{2}{\pi \operatorname{sh} \xi} \right)^{1/2} \operatorname{ch} \{(\nu + 1/2) \xi\}.$$

§ 13. Функции Лежандра

при произвольных значениях степени и порядка

13.1. Если $\nu = n$ — положительное целое число, $\mu = 0$, то равенство (12.04) принимает вид

$$P_n^0(z) = F\left(n+1, -n; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right).$$

Эта функция является многочленом степени n по z , принимающим значение 1 при $z = 1$; коэффициент при z^n имеет вид $(n+1)n/(2^n n!)$. Поскольку присоединенное уравнение Лежандра (12.02) при сформулированных условиях сводится к уравнению Лежандра (12.01) и подчиненные решения единственны с точностью до нормирующего множителя, отсюда следует, что

$$P_n^0(z) = P_n(z),$$

где $P_n(z)$ — многочлены Лежандра, определенные в главе 2, § 7 (сравните (7.14)). Принимая во внимание это тождество, параметр ν иногда называют *степенью функции* $P_\nu^\mu(z)$; μ называется *порядком*.

Многие из свойств $P_n(z)$, сформулированные в главе 2, допускают обобщение на функции $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$. Мы начнем с обобщения интеграла Шлефли.

13.2. Теорема 13.1. Если z не принадлежит интервалу $(-\infty, -1]$, то главное значение функции $P_\nu^{-\mu}(z)$ допускает интегральные представления вида

$$P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{e^{\mu\pi i} \Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1} \pi i \Gamma(\mu-\nu)} (z^2-1)^{\mu/2} \int_{-\infty}^{(1+, z+)} \frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+\mu+1}} dt$$

$$(\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu), \quad (13.01)$$

$$P_\nu^{-\mu}(z) = \frac{2^{\nu\mu\pi i} \Gamma(\nu+1)}{\pi i \Gamma(\nu+\mu+1)} (z^2-1)^{\mu/2} \int_{-\infty}^{(1+, z+)} \frac{(t-z)^{\nu-\mu}}{(t^2-1)^{\nu+1}} dt$$

$$(\operatorname{Re} \nu + \operatorname{Re} \mu > -1). \quad (13.02)$$

Путь интегрирования для обоих интегралов представляет собой односвязную замкнутую петлю, которая исчисляется в бесконечности на положительной действительной полуоси, обходит точки $t = 1$ и $t = z$ один раз в

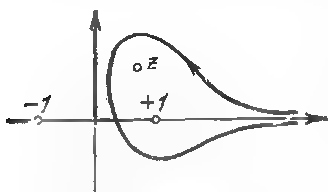


Рис. 13.1. t -плоскость. Контур для $P_v^{-\mu}(z)$.

положительном направлении и возвращается в начальную точку, не пересекая интервала $(-\infty, -1]$ и не имея самопересечений. Ветви числителя и знаменателя непрерывны на пути интегрирования и принимают главные значения в окрестности начальной точки. Ветвь функции $(z^2 - 1)^{\mu/2}$ определяется как в § 12.2.

Путь интегрирования изображен на рис. 13.1¹⁾.

Заметим, прежде всего, что достаточно доказать или (13.01) или

(13.02); каждое из них вытекает из другого в силу тождества $P_{v-1}^{\mu}(z) = P_v^{-\mu}(z)$.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $w = (z^2 - 1)^{-\mu/2} P_v^{-\mu}(z)$, имеет вид

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 w}{dz^2} + 2(\mu + 1) z \frac{dw}{dz} - (v - \mu)(v + \mu + 1) w = 0. \quad (13.03)$$

Подставим вместо w его выражение в виде контурного интеграла

$$I(z) = \int_{\infty} \frac{(t^2 - 1)^v}{(t - z)^{v+\mu+1}} dt. \quad (13.04)$$

Мы имеем

$$(z^2 - 1)I''(z) + 2(\mu + 1)zI'(z) - (v - \mu)(v + \mu + 1)I(z) = (v + \mu + 1)J(z),$$

где

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_{\infty} \frac{(t^2 - 1)^v}{(t - z)^{v+\mu+3}} \{ (z^2 - 1)(v + \mu + 2) + \\ &\quad + 2(\mu + 1)z(t - z) - (v - \mu)(t - z)^2 \} dt = \\ &= \int_{\infty} \frac{(t^2 - 1)^v}{(t - z)^{v+\mu+3}} \{ (v + \mu + 2)(t^2 - 1) - 2(v + 1)t(t - z) \} dt = \\ &= \left[- \frac{(t^2 - 1)^{v+1}}{(t - z)^{v+\mu+2}} \right]_{\infty}. \end{aligned}$$

¹⁾ Если v — неотрицательное целое число, то правую часть (13.01) следует заменить ее предельным значением (см. упр. 13.4). Аналогично для (13.02), когда v — отрицательное целое число.

Таким образом, $I(z)$ удовлетворяет уравнению (13.03), когда выражение, стоящее в квадратных скобках, имеет одно и то же значение на обоих концах пути \mathcal{P} . Это условие выполняется для интеграла по петле в правой части (13.01), поскольку этот интеграл сходится в крайних точках пути, когда $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu$, а выражение в квадратных скобках там равно нулю. В соответствии с этим правая часть выражения (13.01) является решением присоединенного уравнения Лежандра.

Далее, асимптотическая форма выражения (13.01) при $z \rightarrow 1$ имеет вид $A(z-1)^{\mu/2}$, где

$$A = \frac{2^{\mu/2} e^{\mu\pi i} \Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1} \pi i \Gamma(\mu-\nu)} \int_{\infty}^{(1+)} \frac{(t+1)^{\nu}}{(t-1)^{\mu+1}} dt.$$

Если временно наложить условие $\operatorname{Re} \mu < 0$, то этот интеграл можно вычислить, сжимая путь до совпадения с двумя берегами разреза $[1, \infty)$; тогда

$$\int_{\infty}^{(1+)} \frac{(t+1)^{\nu}}{(t-1)^{\mu+1}} dt = (e^{-2\mu\pi i} - 1) \int_1^{\infty} \frac{(t+1)^{\nu}}{(t-1)^{\mu+1}} dt = \frac{2^{\nu-\mu+1} \pi i \Gamma(\mu-\nu)}{e^{\mu\pi i} \Gamma(\mu+1) \Gamma(-\nu)},$$

причем на последнем этапе мы сделали подстановку $t = (2 - \tau)/\tau$, а затем использовали интегральное представление для бета-функции и формулу отражения для гамма-функции. Следовательно,

$$A = \frac{1}{2^{\mu/2} \Gamma(\mu+1)}.$$

Условие $\operatorname{Re} \mu < 0$ снимается аналитическим продолжением по μ и ν при условии, что $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu$.

Предположим теперь, что $\operatorname{Re} \mu > 0$. Тогда правая часть (13.01) является подчиненной в $z = 1$. Она имеет тот же самый нормирующий множитель, что и $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ (ср. (12.08)). Поэтому два решения тождественно равны. Таким образом, равенство (13.01) доказано в случае, когда $\operatorname{Re} \mu$ превосходит $\max(\operatorname{Re} \nu, 0)$ и, следовательно, — снова в силу аналитического продолжения по μ , — когда $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu$. Теорема доказана.

13.3. С помощью теоремы 13.1 можно получить рекуррентные соотношения относительно ν , μ или относительно обоих этих параметров. Положим

$$A_{\nu, \mu} = \frac{e^{-\mu\pi i} \Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1} \pi i \Gamma(-\nu-\mu)} \quad (13.05)$$

и

$$\hat{P}_{\nu}^{\mu}(z) = (z^2 - 1)^{\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(z); \quad (13.06)$$

тогда из (13.01), заменяя μ на $-\mu$, мы получаем

$$\hat{P}_v^\mu(z) = A_{v,\mu} \int_{\mathcal{P}} \frac{(t^2-1)^v}{(t-z)^{v-\mu+1}} dt \quad (\operatorname{Re} v + \operatorname{Re} \mu < 0), \quad (13.07)$$

где \mathcal{P} обозначает путь, использованный в (13.01). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \hat{P}_v^\mu(z) &= (v - \mu + 1) A_{v,\mu} \int_{\mathcal{P}} \frac{(t^2-1)^v}{(t-z)^{v-\mu+2}} dt = \\ &= (v - \mu + 1)(v + \mu) \hat{P}_v^{\mu-1}(z). \end{aligned} \quad (13.08)$$

Применяя эту формулу два раза, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{P}_v^\mu(z) = (v - \mu + 1)(v + \mu)(v - \mu + 2)(v + \mu - 1) \hat{P}_v^{\mu-2}(z). \quad (13.09)$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $\hat{P}_v^\mu(z)$, можно вывести из (13.03), изменяя знак параметра μ . Подставляя в него выражения (13.08) и (13.09), мы получаем

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)(v - \mu + 2)(v + \mu - 1) \hat{P}_v^{\mu-2}(z) - \\ - 2(\mu - 1) z \hat{P}_v^{\mu-1}(z) - \hat{P}_v^\mu(z) = 0. \end{aligned}$$

Заменяя теперь μ на $\mu + 2$ и используя (13.06), мы приходим к первому из искомых соотношений:

$$\begin{aligned} P_v^{\mu+2}(z) + 2(\mu + 1) z (z^2 - 1)^{-1/2} P_v^{\mu+1}(z) - \\ - (v - \mu)(v + \mu + 1) P_v^\mu(z) = 0. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Поскольку функция $P_v^\mu(z)$ — целая по v и μ , все ограничения на параметры, наложенные при доказательстве, устраняются аналитическим продолжением; это верно также и для других рекуррентных соотношений, которые будут выведены ниже.

Для вывода следующей формулы мы используем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{v+1}^\mu(z) &= \\ &= A_{v+1,\mu} \int_{\mathcal{P}} \frac{(t^2-1)^{v+1}}{(t-z)^{v-\mu+2}} dt = \frac{2(v+1) A_{v+1,\mu}}{v-\mu+1} \int_{\mathcal{P}} \frac{t(t^2-1)^v}{(t-z)^{v-\mu+1}} dt = \\ &= \frac{2(v+1) A_{v+1,\mu}}{v-\mu+1} \left\{ \frac{\hat{P}_v^{\mu+1}(z)}{A_{v,\mu+1}} + z \frac{\hat{P}_v^\mu(z)}{A_{v,\mu}} \right\}; \end{aligned}$$

отсюда

$$(z^2 - 1)^{1/2} P_v^{\mu+1}(z) = (v - \mu + 1) P_{v+1}^\mu(z) - (v + \mu + 1) z P_v^\mu(z). \quad (13.11)$$

Другие рекуррентные соотношения, содержащие функции, которые получаются из $P_v^\mu(z)$ при увеличении или уменьшении параметров v и μ на единицу, можно вывести, комбинируя (13.10) и (13.11). Каждое из них можно рассматривать как частный случай соотношений Гаусса между смежными гипергеометрическими функциями¹⁾. Например, чтобы построить рекуррентное соотношение относительно v , мы сначала получим из (13.11) равенство

$$(z^2 - 1)^{1/2} P_v^{\mu+2}(z) = (v - \mu) P_{v+1}^{\mu+1}(z) - (v + \mu + 2) z P_v^{\mu+1}(z).$$

Далее,

$$\begin{aligned} (z^2 - 1) P_v^{\mu+2}(z) &= \\ &= (v - \mu) \{ (v - \mu + 2) P_{v+2}^\mu(z) - (v + \mu + 2) z P_{v+1}^\mu(z) \} - \\ &- (v + \mu + 2) z \{ (v - \mu + 1) P_{v+1}^\mu(z) - (v + \mu + 1) z P_v^\mu(z) \} = \\ &= (v - \mu)(v - \mu + 2) P_{v+2}^\mu(z) - (v + \mu + 2)(2v - 2\mu + 1) z P_{v+1}^\mu(z) + \\ &+ (v + \mu + 1)(v + \mu + 2) z^2 P_v^\mu(z). \end{aligned}$$

Подстановка этого результата в (13.10) и использование равенства (13.11) приводит к искомому равенству

$$(v - \mu + 2) P_{v+2}^\mu(z) - (2v + 3) z P_{v+1}^\mu(z) + (v + \mu + 1) P_v^\mu(z) = 0. \quad (13.12)$$

13.4. Контурный интеграл для $Q_v^\mu(z)$, аналогичный (13.01) и (13.02), можно построить, выбирая другой путь интегрирования.

Теорема 13.2. Если z не принадлежит разрезу $(-\infty, 1]$, то главное значение функции $Q_v^\mu(z)$ дается формулой

$$Q_v^\mu(z) = \frac{e^{-v\pi i} \Gamma(-v)}{2^{v+2}\pi i} (z^2 - 1)^{\mu/2} \int_a^{(1+, -1-)} \frac{(1-t^2)^v}{(z-t)^{v+\mu+1}} dt. \quad (13.13)$$

Путь интегрирования начинается в произвольной точке a интервала $(-1, 1)$, обходит интервал $(a, 1]$ один раз в положительном направлении, возвращается в a , затем обходит $[-1, a]$ один раз в отрицательном направлении и снова возвращается в a . Точка z лежит вне обеих петель. Ветви числителя и знаменателя подынтегрального выражения непрерывны на пути интегрирования и принимают главные значения в начальной точке. Ветвь функции $(z^2 - 1)^{\mu/2}$ определяется как в § 12.2²⁾.

¹⁾ См. упр. 9.4.

²⁾ Снова, если $v = 0, 1, 2, \dots$, правая часть (13.13) заменяется ее предельным значением; см. ниже упр. 13.4.

Путь интегрирования представляет собой фигуру в виде восьмерки, изображенную на рис. 13.2.

Доказательство проводится как в теореме 13.1. На выбранном пути ветвь функции $(z-t)^{v+\mu+1}$ имеет одно и то же значение

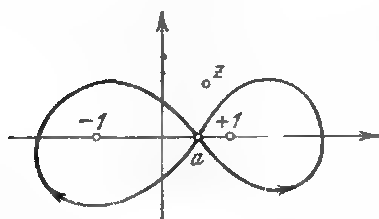


Рис. 13.2. z -плоскость. Контуры для $Q_v^\mu(z)$.

в начале и в конце. Аргумент числителя возрастает на $2\pi l$ при обходе точки $t=1$ и уменьшается на столько же при обходе точки $t=-1$ в противоположном направлении. Таким образом, $(1-t^2)^v$ имеет равные значения на концах пути. Вследствие этого правая часть (13.13) удовлетворяет присоединенному уравнению Лежандра.

При больших z путь интегрирования можно фиксировать. Тогда $(z-t)^{v+\mu+1}$ асимптотически приближается к главному значению функции $z^{v+\mu+1}$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$) равномерно относительно t на пути. Поэтому правая часть (13.13) асимптотически приближается к Bz^{-v-1} , где

$$B = \frac{e^{-v\pi i} \Gamma(-v)}{2^{v+2}\pi i} \int_a^{(1-i), (-1-i)} (1-t^2)^v dt.$$

При $\operatorname{Re} v > -1$ мы можем вычислить B , сжимая путь обычным образом до совпадения с интервалом $[-1, 1]$; таким образом,

$$B = \frac{\pi^{1/2}}{2^{v+1} \Gamma(v+3/2)}.$$

Сравнение с (12.09) устанавливает формулу (13.13) при условии подчиненности $\operatorname{Re} v > -1/2$. Доказательство завершается применением аналитического продолжения.

13.5. Хотя $Q_v^\mu(z)$ является наиболее подходящей функцией для совместного рассмотрения с $P_v^{-\mu}(z)$ в аналитической теории присоединенного уравнения Лежандра, в большинстве приложений в качестве второго решения используется другая функция. Она определяется равенством

$$Q_v^\mu(z) = e^{\mu\pi i} \Gamma(v+\mu+1) Q_v^\mu(z), \quad (13.14)$$

при условии, что сумма $v+\mu$ не равна отрицательному целому числу. Если это условие нарушено, то $Q_v^\mu(z)$, как правило, не существует. Из тождества $Q_v^{-\mu}(z) = Q_v^\mu(z)$ мы выводим, что

$$Q_v^{-\mu}(z) = e^{-2\mu\pi i} \{\Gamma(v-\mu+1)/\Gamma(v+\mu+1)\} Q_v^\mu(z). \quad (13.15)$$

Из (12.07) и (13.13) (при замене μ на $-\mu$) вытекает формула

$$Q_v^u(z) = \frac{\pi^{1/2} e^{\mu\pi i} \Gamma(v+\mu+1)}{2^{v+1} \Gamma(v+3/2)} \frac{(z+1)^{\mu/2}}{(z-1)^{(\mu/2)-v+1}} \times \\ \times F\left(v+1, v+\mu+1; 2v+2; \frac{2}{1-z}\right) = \quad (13.16)$$

$$= \frac{e^{(\mu-v)\pi i} \Gamma(-v) \Gamma(v+\mu+1)}{2^v \pi i} (z^2-1)^{-\mu/2} \int_0^{(1+z, -1-z)} \frac{(1-t^2)^v}{(z-t)^{v-\mu+1}} dt. \quad (13.17)$$

Важность функции $Q_v^u(z)$ связана с тем, что она удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $P_v^u(z)$. В этом можно убедиться следующим образом. Заменяя в (13.17) $1-t^2$ и $z-t$ на $e^{\pm\pi i}(t^2-1)$ и $e^{\pm\pi i}(t-z)$ соответственно, имеем

$$\hat{Q}_v^u(z) = (z^2-1)^{\mu/2} Q_v^u(z) = B_{v,\mu} \int_a^{(1+z, -1-z)} \frac{(t^2-1)^v}{(t-z)^{v-\mu+1}} dt, \quad (13.18)$$

где

$$B_{v,\mu} = e^{(\mu-v)\pi i} \Gamma(-v) \Gamma(v+\mu+1) e^{\pm v\pi i} e^{\mp(v-\mu+1)\pi i} / (2^{v+2} \pi i).$$

Отсюда независимо от знаков $+$ или $-$ вытекает, что

$$\frac{B_{v,\mu}}{B_{v+1,\mu}} = \frac{2(v+1)}{v+\mu+1} = \frac{A_{v,\mu}}{A_{v+1,\mu}}, \quad \frac{B_{v,\mu}}{B_{v,\mu+1}} = \frac{1}{v+\mu+1} = \frac{A_{v,\mu}}{A_{v,\mu+1}},$$

где $A_{v,\mu}$ определено формулой (13.05). В силу этих тождеств, рассматривая (13.18) вместо (13.07) и повторяя рассуждения § 13.3, мы приходим к соотношениям (13.10)–(13.12), в которых символ P заменен символом Q .

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Пусть s — произвольное положительное или отрицательное целое число, а $P_v^{-\mu}(ze^{s\pi i})$ и $Q_v^{\mu}(ze^{s\pi i})$ — ветви функций Лежандра, полученные из главных ветвей в результате $s/2$ обходов в положительном направлении эллипса с фокусами в ± 1 и проходящего через z . Аналогично, пусть $P_{v,s}^{\mu}(z)$ и $Q_{v,s}^{\mu}(z)$ — ветви, полученные из главных ветвей обходом точки 1 (без обхода — 1) s раз в положительном направлении. Показать с помощью упр. 12.1, что

$$Q_v^{\mu}(ze^{s\pi i}) = (-1)^s e^{-sv\pi i} Q_v^{\mu}(z), \quad P_{v,s}^{-\mu}(z) = e^{s\mu\pi i} P_v^{-\mu}(z).$$

Из этих равенств и формул связи (§ 12.3) вывести соотношения

$$P_v^{-\mu}(ze^{s\pi i}) = e^{sv\pi i} P_v^{-\mu}(z) + \\ + \frac{2 \sin \{(v+1/2)s\pi\}}{\cos v\pi} \frac{e^{(1-s)\pi i/2} e^{-\mu\pi i}}{\Gamma(v+\mu+1) \Gamma(\mu-v)} Q_v^\mu(z), \\ \frac{Q_{v,s}^\mu(z)}{\Gamma(v+\mu+1)} = e^{-s\mu\pi i} \frac{Q_v^\mu(z)}{\Gamma(v+\mu+1)} - \frac{\pi i e^{\mu\pi i} \sin(s\mu\pi)}{\sin(\mu\pi) \Gamma(v-\mu+1)} P_v^{-\mu}(z).$$

13.2. Показать, что

$$P_{v+1}^\mu(z) - (v+\mu)(z^2-1)^{1/2} P_v^{\mu-1}(z) - z P_v^\mu(z) = 0, \\ P_{v+1}^\mu(z) - (2v+1)(z^2-1)^{1/2} P_v^{\mu-1}(z) - P_{v-1}^\mu(z) = 0, \\ (z^2-1) \frac{dP_v^\mu(z)}{dz} = (v-\mu+1) P_{v+1}^\mu(z) - (v+1) z P_v^\mu(z).$$

13.3. Деформируя путь интегрирования в (13.01), показать, что если $z \notin (-\infty, -1]$, то

$$P_v^{-\mu}(z) = \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{2^{\mu} \Gamma(\mu-v) \Gamma(v+1)} \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sh} \tau)^{2v+1}}{(z + \operatorname{ch} \tau)^{v+\mu+1}} d\tau \quad (\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} v > -1).$$

13.4. Вывести из (13.01) и (13.13), что если $v = n$ — положительное целое число или нуль, то

$$P_n^{-\mu}(z) = \frac{(-1)^n e^{\mu\pi i} (z^2-1)^{\mu/2}}{2^{n+1} n! \pi i \Gamma(\mu-n)} \times \\ \times \int_{\infty}^{(1+v, z+)} \frac{(t^2-1)^n \ln \left(\frac{t-z}{t^2-1} \right) dt}{(t-z)^{n+\mu+1}} \quad (\operatorname{Re} \mu > n)$$

и

$$Q_n^\mu(z) = \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{2^{n+2} n! \pi i} \int_a^{(1+, z-)} \frac{(1-t^2)^n \ln \left(\frac{z-t}{1-t^2} \right) dt}{(z-t)^{n+\mu+1}},$$

где логарифмы непрерывны на путях интегрирования и принимают главные значения в окрестностях начальных точек.

§ 14. Функции Лежандра при целых значениях степени и порядка

14.1. Если v и μ неотрицательные целые числа, то их обычно заменяют символами n и m соответственно. Этот случай представляет особый интерес в физических приложениях. Заметим, что часть разреза от $-\infty$ до -1 в определении ветвей функции $(z^2-1)^{\pm m/2}$ в § 12.2 не является здесь необходимой: выбранные ветви $(z^2-1)^{\pm m/2}$ положительны при $z > 1$ и непрерывны в z -плоскости, разрезанной вдоль интервала $[-1, 1]$.

Из равенств (9.05), (12.04) и формулы дифференцирования для гипергеометрической функции, приведенной в упр. 9.3, мы получаем, что

$$P_n^m(z) = \frac{(z+1)^{m/2}}{(z-1)^{m/2}} F\left(n+1, -n; 1-m; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) = (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z), \quad (14.01)$$

поскольку $P_n^0(z) = P_n(z)$. Из этой важной формулы непосредственно вытекают следующие утверждения: 1) если $m > n$, то $P_n^m(z) = 0$; 2) если $m < n$ и m — четно, то $P_n^m(z)$ — многочлен степени n ; 3) если $m < n$ и m — нечетно, то единственным разрезом, необходимым для выделения главной ветви $P_n^m(z)$, является разрез вдоль интервала $[-1, 1]$.

Из (14.01) и формулы Родрига (глава 2, (7.06)) выводим

$$P_n^m(z) = \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2-1)^n, \quad (14.02)$$

и в силу формулы Коши

$$P_n^m(z) = \frac{(n-m)!}{2^{n+1} n!} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m+1}} dt, \quad (14.03)$$

где \mathcal{C} — односвязный замкнутый контур, обходящий точку $t = z$.

Другой интеграл типа Шлефли можно вывести из (13.02). При $\nu = n$ и $\mu = m$ ($\leq n$) подынтегральное выражение однозначна и не имеет особой точки при $t = z$. Следовательно, петлю можно заменить односвязным замкнутым контуром \mathcal{C}' , обходящим $t = 1$, но не обходящим $t = -1$:

$$P_n^{-m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!}{(n+m)!} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{\pi i} \int_{\mathcal{C}'} \frac{(t-z)^{n-m}}{(t^2-1)^{n+1}} dt.$$

Далее, используя соотношение

$$(n-m)! P_n^m(z) = (n+m)! P_n^{-m}(z) \quad (n \geq m), \quad (14.04)$$

полученное из (12.11), выводим искомую формулу

$$P_n^m(z) = (-1)^m \frac{2^n n!}{(n-m)!} \frac{(z^2-1)^{m/2}}{\pi i} \int_{\mathcal{C}'} \frac{(t-z)^{n-m}}{(t^2-1)^{n+1}} dt \quad (n \geq m). \quad (14.05)$$

При $z \neq \pm 1$ в качестве контура \mathcal{C} в (14.03) можно взять окружность

$$t = z + (z^2-1)^{1/2} e^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi). \quad (14.06)$$

Тогда

$$t^2 - 1 = 2(z^2 - 1)^{1/2} e^{i\theta} \{z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\},$$

и мы получаем представление

$$P_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{n! \pi} \int_0^\pi \{z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^n \cos m\theta \, d\theta \quad (14.07)$$

(ср. главу 2, упр. 7.9). Ограничение $z \neq \pm 1$ может быть устранено по непрерывности.

При $\operatorname{Re} z > 0$ легко проверить, что окружность (14.06) содержит внутри себя $t = 1$, но не содержит $t = -1$. Выбирая эту окружность в качестве \mathcal{C}' , выводим из (14.05) формулу

$$P_n^m(z) = \frac{(-1)^m n!}{(n-m)! \pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\theta \, d\theta}{\{z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^{n+1}} \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (14.08)$$

В формулах (14.07) и (14.08) функция $P_n^m(z)$ имеет главное значение.

14.2. Как и для $P_n^m(z)$, верхний индекс второго решения при $m = 0$ обычно не пишут. Таким образом, из (13.16) имеем

$$Q_n(z) \equiv Q_n^0(z) = \frac{\pi^{1/2} n!}{2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} F\left(n+1, n+1; 2n+2; \frac{2}{1-z}\right).$$

Для выделения главной ветви здесь снова необходим разрез лишь вдоль интервала $[-1, 1]$.

Аналогично формуле (14.01) имеем

$$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z). \quad (14.09)$$

Чтобы доказать эту формулу, продифференцируем уравнение Лежандра (12.01) m раз с помощью теоремы Лейбница. Мы видим, что если w удовлетворяет уравнению Лежандра, то $v \equiv d^m w / dz^m$ удовлетворяет уравнению

$$(1 - z^2) \frac{d^2 v}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{dv}{dz} + (n-m)(n+m+1)v = 0.$$

Делая еще одну замену $u = (z^2 - 1)^{m/2} v$, находим, что u удовлетворяет присоединенному уравнению Лежандра (12.02) (ср. (13.03) при $\nu = n$ и $\mu = m$). В частности, это означает, что правая часть (14.09) удовлетворяет присоединенному уравнению Лежандра. Можно доказать, что это решение является подчинен-

ным в $z = \infty$; поэтому оно должно отличаться лишь множителем от функции $Q_n^m(z)$. Равенство этого множителя единице можно установить из сравнения с формулой (13.16).

Замкнутое выражение для $Q_n(z)$ через $P_n(z)$ выводится следующим образом. Функция F в (12.04) при $\nu = n$ разлагается в конечный ряд по степеням $z - 1$ и полученное выражение для $P_n^{-\mu}(z)$ дифференцируется по μ . Тогда, используя (12.22), мы получаем

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!(s!)^2 2^s} \{ \psi(n+1) - \psi(s+1) \} (z-1)^s. \quad (14.10)$$

Функция $Q_n(z)$ и логарифм имеют здесь главные значения.

При условии, что z не принадлежит разрезу от -1 до 1 , интеграл для главной ветви $Q_n^m(z)$, аналогичный (14.03), можно получить из (13.13), деформируя путь интегрирования до совпадения с разрезом и последовательно полагая $\nu = n$ и $\mu = m$:

$$Q_n^m(z) = \frac{(-1)^m (n+m)!}{2^{n+1} n!} (z^2 - 1)^{m/2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n}{(z-t)^{n+m+1}} dt \quad (z \notin [-1, 1]). \quad (14.11)$$

Отметим, между прочим, что, в отличие от формул (14.03) и (14.05), эта формула остается справедливой и тогда, когда m и n заменяются на ν и μ , если интеграл сходится, т. е. если $\operatorname{Re} \nu > -1$.

Предположим теперь на время, что $z > 1$. Делая подстановку

$$t = z - (z^2 - 1)^{1/2} e^{\theta}$$

в (14.11), мы находим

$$Q_n^m(z) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!} \int_0^{\xi} (z - (z^2 - 1)^{1/2} \operatorname{ch} \theta)^n \operatorname{ch} m\theta d\theta, \quad (14.12)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = \operatorname{Arcth} z.$$

Временное ограничение снимается аналитическим продолжением: равенство (14.12) выполняется при комплексных z при условии, что $Q_n^m(z)$ имеет главное значение и ветви функций $(z^2 - 1)^{1/2}$ и ξ непрерывны в разрезанной плоскости.

14.3. Интегральное представление для $Q_n^m(z)$ через $P_n^m(z)$ (связывающее главные ветви), можно найти с помощью построенного из них вронскиана¹⁾. Из (12.16), (13.14) и (14.04) мы выводим

$$P_n^m(z) Q_n^{m'}(z) - Q_n^m(z) P_n^{m'}(z) = (-1)^{m-1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{z^2-1}. \quad (14.13)$$

Повторное применение теоремы Роля к формуле (14.02) показывает, что все нули функции $P_n^m(z)$ лежат в интервале $[-1, 1]$. Следовательно, деля обе части равенства (14.13) на $\{P_n^m(z)\}^2$, и интегрируя, мы находим, что

$$Q_n^m(z) = (-1)^m P_n^m(z) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\{P_n^m(t)\}^2} \quad (n \geq m), \quad (14.14)$$

если путь интегрирования не пересекает разрез $[-1, 1]$.

Снова предполагая, что z не лежит на разрезе, с помощью интегральной формулы Коши можно найти другое интегральное представление $Q_n^m(z)$ через $P_n^m(z)$. Допустим для простоты, что m равно нулю. Тогда

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} \frac{Q_n(t)}{t-z} dt,$$

где \mathcal{C}_1 — большая окружность, а \mathcal{C}_2 — замкнутый контур, лежащий внутри \mathcal{C}_1 , содержащий внутри себя интервал $[-1, 1]$ и не содержащий точку z (рис. 14.1). Вклад от \mathcal{C}_1 стремится к нулю, когда радиус \mathcal{C}_1 стремится к бесконечности (ср. (12.09)). Далее, сжимая контур \mathcal{C}_2 до совпадения с двумя берегами интервала $[-1, 1]$, мы находим, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{Q_n(t-i0) - Q_n(t+i0)}{z-t} dt.$$

Обходя логарифмическую особую точку функции $Q_n(t)$ при $t=1$, мы выводим из (14.10), что

$$Q_n(t-i0) - Q_n(t+i0) = \pi i P_n(t) \quad (-1 < t < 1).$$

Таким образом, мы приходим к интегралу Неймана

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{z-t} dt \quad (z \notin [-1, 1]). \quad (14.15)$$

¹⁾ Фактически это является построением второго решения дифференциального уравнения, если одно из решений известно; сравните § 5.1.

14.4. Последний результат, который мы установим в этом параграфе — это так называемая *теорема сложения* для многочленов Лежандра.

Теорема 14.1. Пусть z , z_1 , z_2 и φ — действительные или комплексные числа, такие, что

$$z = z_1 z_2 - (z_1^2 - 1)^{1/2} (z_2^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi, \quad (14.16)$$

причем ветви квадратных корней выбираются согласно § 14.1. Тогда

$$P_n(z) = P_n(z_1) P_n(z_2) + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z_1) P_n^m(z_2) \cos m\varphi. \quad (14.17)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть действительные значения z_1 , z_2 и φ при $z_1 > 1$ и $z_2 > 1$; обобщение на комплексные значения вытекает из аналитического продолжения. Эта теорема основывается на тождестве

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{z_2 + (z_2^2 - 1)^{1/2} \cos \theta - h \{z_1 + (z_1^2 - 1)^{1/2} \cos(\varphi - \theta)\}} = \frac{1}{(1 - 2zh + h^2)^{1/2}}, \quad (14.18)$$

справедливое при достаточно малых $|h|$, которое в свою очередь выводится из следующего легко проверяемого тождества.

Лемма 14.1. Если a , b и c — действительные числа и $a > (b^2 + c^2)^{1/2}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - b^2 - c^2)^{1/2}}.$$

Разлагая левую часть (14.18) в ряд по степеням h и используя равенство (7.20) из главы 2, мы видим, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\{z_1 + (z_1^2 - 1)^{1/2} \cos(\varphi - \theta)\}^n}{\{z_2 + (z_2^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^{n+1}} d\theta. \quad (14.19)$$

Из (14.16) следует, что $P_n(z)$ — многочлен степени n относительно $\cos \varphi$ и поэтому допускает представление вида

$$P_n(z) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{m=1}^n \alpha_m \cos m\varphi,$$

где коэффициенты α_m не зависят от φ . Это и есть искомое разложение. Поскольку оно является рядом Фурье по косинусам φ , коэффициенты имеют вид

$$\alpha_m = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \cos m\varphi d\varphi \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

Подставляя (14.19) в последний интеграл и меняя порядок интегрирования, мы находим, что

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_{n,m}(\theta) d\theta}{\{z_2 - z_1 (z_1^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^{n+1}}, \quad (14.20)$$

где

$$\begin{aligned} I_{n,m}(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \{z_1 + (z_1^2 - 1)^{1/2} \cos(\varphi - \theta)\}^n \cos m\varphi d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{z_1 + (z_1^2 - 1)^{1/2} \cos \chi\} \cos(m\theta + m\chi) d\chi. \end{aligned}$$

Если заменить $\cos(m\theta + m\chi)$ на $\cos m\theta \cos m\chi - \sin m\theta \sin m\chi$, то слагаемые с синусами не дают вклада в $I_{n,m}(\theta)$, поскольку остальные множители в подынтегральном выражении — четные по χ . Вклад от слагаемого с косинусами вычисляется с помощью формулы (14.07); таким образом,

$$I_{n,m}(\theta) = \frac{n! 2\pi}{(n+m)!} P_n^m(z_1) \cos m\theta.$$

Подставляя это выражение в (14.20) и применяя (14.08), мы получаем

$$\alpha_m = 2(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z_1) P_n^m(z_2).$$

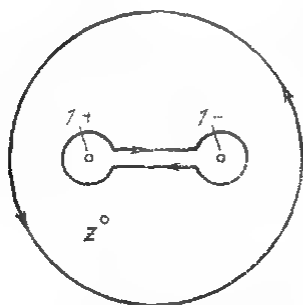


Рис. 14.1. t -плоскость.

Доказательство закончено.

Теорему сложения можно обобщить на случай, когда n замещается действительным или комплексным числом ν ; при этом сумма в (14.17) должна вычисляться от $m=1$ до $m=\infty$, а факториалы нужно заменить гамма-функциями¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Делая в (14.12) при $m=0$ подстановку

$$\{z + (z^2 - 1)^{1/2} \operatorname{ch} \psi\} \{z - (z^2 - 1)^{1/2} \operatorname{ch} \psi\} = 1,$$

¹⁾ Гобсон (1952, § 220).

вывести интеграл Гейне

$$Q_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{\{z + (z^2 - 1)^{1/2} \operatorname{ch} \varphi\}^{n+1}}.$$

14.2¹⁾. Вывести из предыдущего упражнения, что если $z = \operatorname{ch}(\alpha + i\beta)$, а α и β — действительные числа, то

$$|Q_n(z)| \leq e^{-(n-1)\alpha} |Q_0(\operatorname{ch} 2\alpha)| \quad (n \geq 1).$$

14.3. Используя формулу Родрига для многочлена Чебышева $U_{m-1}(x)$ (глава 2, (7.07) и упр. 7.3) или индукцию, доказать лемму Якоби

$$\frac{d^{m-1} \sin^{2m-1} \theta}{d(\cos \theta)^{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{(2m)!}{2^m m!} \sin m\theta.$$

С помощью повторного интегрирования по частям и этого соотношения вывести из (14.07), что

$$P_n^m(z) = \frac{2^m m! (n+m)!}{(2m)! (n-m)!} \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{\pi} \int_0^{\pi} \{z + (z^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^{n-m} \sin^{2m} \theta d\theta$$

$$(n \geq m).$$

14.4. Вывести из предыдущего упражнения, что при $\xi > 0$

$$P_n^m(\operatorname{ch} \xi) = \frac{2^{2m} (1/2)! (n+m)!}{\pi (2m)! (n-m)! \operatorname{sh}^m \xi} \int_0^{\xi} (\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} t)^{m-1/2} \operatorname{ch} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right\} dt.$$

14.5. Используя интеграл Неймана и разложение (7.20) из главы 2, показать, что если $z > 1$, а h положительно и достаточно мало, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) h^n = \frac{1}{(1 - 2zh + h^2)^{1/2}} \ln \left\{ \frac{z - h + (1 - 2zh + h^2)^{1/2}}{(z^2 - 1)^{1/2}} \right\}.$$

С помощью упр. 7.9 из главы 2 показать, что при $|h| < 1$ сумма в левой части сходится равномерно в любой компактной области изменения z , не пересекающейся с разрезом $[-1, 1]$, и обобщить таким образом разложение на комплексные значения z .

§ 15. Функции Феррерса

15.1. Если ν и μ действительны, главные ветви функций $P_{\nu}^{-\mu}(z)$ и $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ действительны на части действительной оси от 1 до ∞ . На разрезе от $-\infty$ до 1 можно рассмотреть два значения для каждой функции в зависимости от того, приближаемся мы к разрезу снизу или сверху. Заменяя z на x , мы обозначим эти значения через $P_{\nu}^{-\mu}(x+i0)$, $P_{\nu}^{-\mu}(x-i0)$, $Q_{\nu}^{\mu}(x+i0)$ и $Q_{\nu}^{\mu}(x-i0)$. Ни одна из этих функций в общем случае не является действи-

¹⁾ Ср. упр. 7.9 из главы 2.

тельной. Однако, поскольку присоединенное уравнение Лежандра при действительных μ и ν действительно, желательно иметь стандартные действительные решения. В интервале $-\infty < x \leq -1$ естественно выбрать $P_v^{-\mu}(-x)$ и $Q_v^{\mu}(-x)$ или $e^{-\mu\pi i} Q_v^{\mu}(-x)$. Чтобы охватить оставшийся интервал $-1 \leq x \leq 1$, мы введем следующие решения, называемые *функциями Феррерса*:

$$P_v^{\mu}(x) = e^{\mu\pi i/2} P_v^{\mu}(x + i0) = e^{-\mu\pi i/2} P_v^{\mu}(x - i0), \quad (15.01)$$

$$\begin{aligned} Q_v^{\mu}(x) &= \frac{1}{2} \Gamma(\nu + \mu + 1) \{e^{-\mu\pi i/2} Q_v^{\mu}(x + i0) + e^{\mu\pi i/2} Q_v^{\mu}(x - i0)\} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-3\mu\pi i/2} Q_v^{\mu}(x + i0) + \frac{1}{2} e^{-\mu\pi i/2} Q_v^{\mu}(x - i0). \end{aligned} \quad (15.02)$$

Эти равенства определяют $P_v^{\mu}(x)$ и $Q_v^{\mu}(x)$ для всех комбинаций ν и μ , исключая случаи $\nu + \mu = -1, -2, -3, \dots$. Очевидно, что $P_v^{-\mu}(x)$ и $Q_v^{-\mu}(x)$ — также решения. Если верхний индекс равен нулю, то его обычно не пишут; таким образом, $P_n(x) = P_n(x)$, когда n — неотрицательное целое число.

В согласованности двух определений (15.01) функций $P_v^{\mu}(x)$ можно убедиться, обходя особую точку $x = 1$ и используя (12.04) (где μ заменено на $-\mu$). При этом мы получим также

$$P_v^{\mu}(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(\nu + 1, -\nu; 1 - \mu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right). \quad (15.03)$$

Равенство (15.03) можно использовать для обобщения определения функции $P_v^{\mu}(x)$ на комплексные значения ν , μ и x : разрезы при этом выбираются вдоль интервалов $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$ изменения x .

Соответствующие выражения для других функций Феррерса выводятся из (15.03) и формулы связи

$$\frac{2\sin \mu\pi}{\pi} Q_v^{\mu}(x) = \cos \mu\pi P_v^{\mu}(x) - \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} P_v^{-\mu}(x), \quad (15.04)$$

которая сама получается из предыдущих соотношений и формулы (12.11). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\sin \mu\pi}{\pi} Q_v^{\mu}(x) &= \cos \mu\pi \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(\nu + 1, -\nu; 1 - \mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) - \\ &- \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma(\nu - \mu + 1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2} F\left(\nu + 1, -\nu; 1 + \mu; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right). \end{aligned} \quad (15.05)$$

При действительных значениях ν и μ , таких, что $\nu \geq -1/2$ и $\mu \geq 0$ ¹⁾, предельные формы $P_v^{\pm\mu}(x)$ и $Q_v^{\pm\mu}(x)$, когда x стре-

¹⁾ Ср. § 12.1.

мится к особой точке 1 слева, можно вывести из (15.03), (12.21) и (12.23). Они имеют вид

$$P_v^\mu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\mu/2}, \quad P_v^{-\mu}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\mu)} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\mu/2}, \quad (15.06)$$

$$Q_v^\mu(x) \sim \frac{1}{2} \cos \mu \pi \Gamma(\mu) \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\mu/2}, \quad Q_v^{-\mu}(x) \sim \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(v-\mu+1)}{2\Gamma(v+\mu+1)} \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\mu/2}, \quad (15.07)$$

$$P_v(x) \rightarrow 1, \quad Q_v \sim \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right), \quad (15.08)$$

при условии, что гамма-функции конечны, а $\cos \mu \pi$ отличен от нуля.

Рассмотрение этих предельных форм показывает, что ни одна из пар решений $P_v^\mu(x)$, $Q_v^{\pm\mu}(x)$ не является численно удовлетворительной в окрестности точки $x=1$ ни при каких неотрицательных значениях $v+1/2$ и μ . Однако в случае, когда v и μ — неотрицательные целые числа, $P_n^{-m}(x)$ и $Q_n^m(x)$ являются удовлетворительными.

15.2. Функции $P_v^\mu(x)$ и $Q_v^\mu(x)$ аналитичны в $x=0$ и поэтому их можно разложить в ряды Маклорена. Эти ряды понадобятся нам в последующих главах; их можно вывести следующим образом.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $(1-x^2)^{\mu/2} P_v^\mu(x)$ и $(1-x^2)^{\mu/2} Q_v^\mu(x)$, имеет вид

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} + 2(\mu-1)x \frac{dw}{dx} + (v+\mu)(v-\mu+1)w = 0$$

(ср. (13.03)). Метод § 3.2 дает четное и нечетное решения

$$w_1 = F\left(-\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right),$$

$$w_2 = xF\left(-\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + 1; \frac{3}{2}; x^2\right). \quad (15.09)$$

Поэтому

$$(1-x^2)^{\mu/2} P_v^\mu(x) = A_1 w_1 + A_2 w_2, \quad (15.10)$$

$$(1-x^2)^{\mu/2} Q_v^\mu(x) = B_1 w_1 + B_2 w_2, \quad (15.11)$$

где A_1 , A_2 , B_1 и B_2 не зависят от x .

При использовании методов действительной переменной для определения A_1 , A_2 , B_1 и B_2 следовало бы положить $x \rightarrow 1$ в (10.10) и (15.11), в производных этих выражений по x и учесть формулу

Гаусса (9.11) для функции F с аргументом, равным 1. Вместо этого мы воспользуемся менее трудоемким методом, основанным на предельных формах решений в случае, когда x стремится к $\pm i\infty$.

Положим $x = i\xi$ и предположим на время, что $\operatorname{Re} v > -1/2$ и ни одно из чисел μ , $2v$, $v \pm \mu$ не равно целому числу или нулю. Полагая $\xi \rightarrow \infty$, мы получаем из (15.03), (15.09) и (10.16)

$$(1-x^2)^{\mu/2} P_v^\mu(x) \sim \frac{\Gamma(2v+1) e^{(v+\mu)\pi i/2} \xi^{v+\mu}}{2^v \Gamma(v+1) \Gamma(v-\mu+1)}$$

и

$$w_1 \sim \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \xi^{v+\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)},$$

$$w_2 \sim i \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \xi^{v+\mu}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\mu + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + 1\right)}.$$

Следовательно,

$$\frac{2^v e^{(v+\mu)\pi i/2}}{\pi \Gamma(v-\mu+1)} = \frac{A_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)} + \frac{iA_2}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\mu + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + 1\right)}.$$

Аналогично, полагая $x = -i\xi$ и $\xi \rightarrow \infty$, мы получаем такое же равенство, но с противоположными знаками перед i . Решение этих двух уравнений дает

$$A_1 = \frac{2^\mu \pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)},$$

$$A_2 = -\frac{2^{\mu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\mu\right)}, \quad (15.12)$$

причем все ограничения на параметры снимаются с помощью аналитического продолжения.

Чтобы найти коэффициенты в (15.11), мы применим формулу связи (15.04). Из (15.10) и (10.03) имеем

$$(1-x^2)^{\mu/2} P_v^{-\mu}(x) = \hat{A}_1 w_1 + \hat{A}_2 w_2,$$

где \hat{A}_1 и \hat{A}_2 получаются соответственно из A_1 и A_2 заменой

в (15.12) μ на $-\mu$. Тогда

$$B_1 = \frac{\pi \Gamma(v + \mu + 1)}{2 \sin \mu \pi} \left\{ \frac{\cos \mu \pi A_1}{\Gamma(v + \mu + 1)} - \frac{\widehat{A}_1}{\Gamma(v - \mu + 1)} \right\}$$

и

$$B_2 = \frac{\pi \Gamma(v + \mu + 1)}{2 \sin \mu \pi} \left\{ \frac{\cos \mu \pi A_2}{\Gamma(v + \mu + 1)} - \frac{\widehat{A}_2}{\Gamma(v - \mu + 1)} \right\}.$$

Используя формулы (15.12) и производя некоторые сокращения, мы находим, что

$$\begin{aligned} B_1 &= -2^{\mu-1} \pi^{1/2} \sin \left\{ \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \mu \right) \pi \right\} \Gamma \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \right) / \Gamma \left(\frac{1}{2} v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu + 1 \right), \\ B_2 &= 2^\mu \pi^{1/2} \cos \left\{ \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \mu \right) \pi \right\} \Gamma \left(\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \mu + 1 \right) / \Gamma \left(\frac{1}{2} v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (15.13)$$

если $v + \mu \neq -1, -2, -3, \dots$

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Показать, что

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \\ - W_{n-1}(x) \quad (n \geq 1),$$

где $W_n(x)$ — многочлен степени n и

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = \frac{3}{2} x, \quad W_2(x) = \frac{5}{2} x^2 - \frac{2}{3}.$$

15.2. Показать, что если n и m — положительные целые числа, то

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x), \quad Q_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} Q_n^{(m)}(x)$$

и

$$P_n^{-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2} \int_x^1 \int_x^1 \dots \int_x^1 P_n(x) (dx)^m.$$

15.3. Вывести из (15.06) и (15.07) соотношения для вронскианов:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \{ P_v^{-\mu}(x), Q_v^{\mu}(x) \} &= \frac{\cos \mu \pi}{1-x^2}, \\ \mathcal{W} \{ P_v^{\mu}(x), Q_v^{\mu}(x) \} &= \frac{\Gamma(v + \mu + 1)}{\Gamma(v - \mu + 1)} \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Проверить этот результат, вычислив значения в точке $x = 0$.

15.4. Доказать, что при $x \in (-1, 1)$

$$P_v^\mu(-x) = \cos\{(v+\mu)\pi\} P_v^\mu(x) - \frac{2}{\pi} \sin\{(v+\mu)\pi\} Q_v^\mu(x),$$

$$Q_v^\mu(-x) = -\frac{1}{2} \pi \sin\{(v+\mu)\pi\} P_v^\mu(x) - \cos\{(v+\mu)\pi\} Q_v^\mu(x).$$

15.5. Показать, что

$$\int \left\{ (v-v')(v+v'+1) + \frac{\mu'^2 - \mu^2}{1-x^2} \right\} P_v^\mu(x) P_{v'}^{\mu'}(x) dx = \\ = (1-x^2) \mathcal{H} \{ P_v^\mu(x), P_{v'}^{\mu'}(x) \}.$$

Вывести с помощью формулы (14.04) и предыдущего упражнения, что если l, m и n — неотрицательные целые числа, то

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx = \delta_{l,m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!(n+1/2)}$$

и

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^l(x) P_n^m(x)}{1-x^2} dx = \delta_{l,m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!m} \quad (m > 0).$$

15.6 Пусть μ и x фиксированы, причем значение x действительно и положительно. Вывести из (15.03), что если v стремится к бесконечности по последовательности положительных значений, то $v^\mu P_v^{-\mu} \{\cos(x/v)\}$ стремится к $J_\mu(x)$.

Исторические сведения и дополнительные ссылки

Почти весь материал этой главы является классическим. Существенным образом были использованы книги Бейтмена и Эрдейи (1973) и Уиттекера и Ватсона (1963). В данном выводе свойства гипергеометрической функции и функций Лежандра уделено несколько больше внимания аналитической теории дифференциальных уравнений, особенно голоморфности относительно параметров (теорема 3.2).

Новые обозначения F и Q для решений гипергеометрического уравнения и присоединенного уравнения Лежандра были введены с некоторым колебанием. Однако в настоящем подходе использование решений, целых по всем параметрам, имеет существенные преимущества. Кроме того, многие формулы, в которые входят F и Q , упрощаются для функций F и Q .

§§ 1—6. Относительно обобщения на линейные дифференциальные уравнения более высокого порядка и системы уравнений см., например, Айнс (1939) или Хартман (1970). Каждая из этих работ содержит также обширные исторические сведения.

§§ 9—11. Относительно дальнейших ссылок и свойств гипергеометрической функции и особенно обобщенных гипергеометрических функций, см. Бейтмен и Эрдейи (1973), Каратеодори (1960), Слейтер (1966) и Люк (1969a, b).

§§ 12–25. Классической работой по функциям Лежандра является книга Гобсона (1952). Другие обширные исследования включают книги Сноу (1952), Робина (1957, 1958, 1959) и Мак-Роберта (1967).

В интегральных представлениях в теореме 13.1 для $P_v^{-\mu}(z)$ на параметры наложены более жесткие ограничения, чем в интегралах по петле, использованных Гобсоном (1952, § 118) в качестве определения. Преимущество нашего подхода заключается в том, что он сразу выявляет свойство подчиненности функции $P_v^{-\mu}(z)$ в точке $z = 1$. Интегральное представление в теореме 13.2 для $Q_v^{-\mu}(z)$ совпадает с определением Гобсона (Гобсон, 1952, § 125).

§ 15.1. Феррерс (1877) рассмотрел присоединенное уравнение Лежандра в случае, когда ν и μ — неотрицательные целые числа, и детально изучил только одно решение, которое он обозначал через $T_v^{(\mu)}(x)$. В наших обозначениях $T_v^{(\mu)}(x) = (-1)^\mu P_v^\mu(x)$.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ — ГРИНА

§ 1. Преобразование Лиувилля

1.1. В этой главе мы начинаем изучение приближений для решений дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = f(x) w, \quad (1.01)$$

в котором x — действительная или комплексная переменная, а $f(x)$ — заданная функция. Все однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка могут быть приведены к этому виду подходящей заменой зависимой или независимой переменной.

Простейшее приближение получается, если предположить, что $f(x)$ — постоянная величина. Тогда

$$w \approx Ae^{x\sqrt{f(x)}} + Be^{-x\sqrt{f(x)}}, \quad (1.02)$$

где A и B — произвольные постоянные. Приближение имеет такой же вид, если функция $f(x)$ непрерывна, а рассматриваемые интервал или область достаточно малы и не содержат начала координат. Другими словами, формула (1.02) дает описание *локального поведения* решений. В частности, можно ожидать, что в интервале, где функция $f(x)$ действительна, положительна и медленно меняется, решения уравнения (1.01) имеют *экспоненциальный* характер, т. е. могут быть записаны в виде линейной комбинации двух решений, величины которых монотонно изменяются, причем одно возрастает, а другое убывает.

Аналогично можно ожидать, что в интервале, где функция $f(x)$ отрицательна, решения (1.01) имеют *тригонометрический* (или *осцилляционный*) характер. В последующих параграфах мы увидим, что эти предположения, вообще говоря, верны¹⁾.

¹⁾ Исключением является, например, случай, когда $f(x) = \alpha(\alpha - 1)/x^2$, где $x > 0$ и α — такая постоянная, что $0 < \alpha < 1$. Хотя функция $f(x)$ отрицательна, решения $w = Ax^\alpha + Bx^{1-\alpha}$ при $\alpha \neq \frac{1}{2}$ или $w = x^{1/2}(A + B \ln x)$ при $\alpha = 1/2$ не являются осциллирующими.

1.2. Для большинства задач приближение (1.02) слишком грубо. Мы попытаемся улучшить его, предварительно преобразовав (1.01) в дифференциальное уравнение такого же типа, в котором функция $f(x)$ заменена функцией, изменяющейся медленнее.

Теорема 1.1. Пусть w удовлетворяет уравнению (1.01), $\xi(x)$ — произвольная трижды дифференцируемая функция x и

$$W = \{\xi'(x)\}^{1/2} w. \quad (1.03)$$

Тогда функция W удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} \cdot \left\{ \dot{x}^2 f(x) + \dot{x}^{1/2} \frac{d^2}{d\xi^2} (\dot{x}^{-1/2}) \right\} W, \quad (1.04)$$

где точка обозначает дифференцирование по ξ .

Это утверждение проверяется прямой подстановкой. Если рассматривать ξ как независимую переменную, то уравнение (1.01) преобразуется в

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\ddot{x}}{x} \frac{dw}{d\xi} = \dot{x}^2 f(x) w.$$

Слагаемое с первой производной исчезает, если взять новую зависимую переменную в форме (1.03). При этом уравнение принимает вид (1.04).

Преобразование, указанное в теореме, известно под названием *преобразования Лиувилля*. Второе слагаемое в коэффициенте перед W в (1.04) часто записывают в виде

$$\dot{x}^{1/2} \frac{d^2}{d\xi^2} (\dot{x}^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \{x, \xi\},$$

где $\{x, \xi\}$ — производная в смысле Шварца,

$$\{x, \xi\} = \frac{\ddot{x}}{x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{x}}{x} \right)^2.$$

1.3. Для заданной функции $f(x)$ добиться, чтобы коэффициент перед W в (1.04) был постоянной величиной, не проще, чем точно решить первоначальное дифференциальное уравнение (1.01). Поэтому мы ограничимся тем, что выберем $\xi(x)$ так, чтобы член $\dot{x}^2 f(x)$ был постоянным, причем мы можем без потери общности считать его равным единице. Тогда

$$\xi(x) = \int f^{1/2}(x) dx. \quad (1.05)$$

Если предположить, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема, то можно вычислить производную в смысле Шварца, и уравнение

(1.04) принимает вид

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = (1 + \varphi) W, \quad (1.06)$$

где

$$\varphi = \frac{4f(x)f''(x) - 5f'^2(x)}{16f^3(x)} = -\frac{1}{f^{3/4}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{f^{1/4}} \right). \quad (1.07)$$

До сих пор выкладки были точными. Если же теперь пренебречь вкладом φ , то независимыми решениями уравнения (1.06) будут функции $e^{\pm i\xi}$. Возвращаясь к первоначальным переменным и замечая, что $\xi'(x) = f^{1/2}(x)$, мы получаем

$$w \approx Af^{-1/4}e^{\int f^{1/2}dx} + Bf^{-1/4}e^{-\int f^{1/2}dx}, \quad (1.08)$$

где A и B — произвольные постоянные. Это выражение называется *приближением Лиувилля — Грина* (ЛГ)¹⁾ для общего решения уравнения (1.01). Выражения в формуле (1.08) $f^{-1/4}\exp(\int f^{1/2}dx)$ и $f^{-1/4}\exp(-\int f^{1/2}dx)$ называются *ЛГ-функциями*.

Очевидно, что точность приближения (1.08) связана с величиной отбрасываемой функции φ в рассматриваемой области. Строгое исследование этой зависимости будет проведено в следующих параграфах. Здесь же мы просто отметим следующее: можно ожидать, что величина $|\varphi|$ мала и, следовательно, приближение становится более точным, если величина $|f^{-1/4}|$ достаточно мала или медленно меняется. Этим условием охватывается и случай, когда применимо более простое приближение (1.02).

Отметим сразу же важный случай, когда указанное приближение становится неприменимым: интервалы или области содержат нули функции f . Очевидно, что тогда функция φ обращается в бесконечность в этих точках и приближение теряет смысл. Нули f называются *точками поворота* или *точками ветвления* дифференциального уравнения (1.01).

Основанием для таких названий является то, что когда переменные действительны, а нуль — простой (или, в более общем случае, нечетного порядка), то он отделяет интервал, в котором решения имеют экспоненциальный вид, от интервала, где они осциллируют.

В настоящей главе мы предполагаем, что все рассматриваемые области не содержат точек поворота.

1.4. Другой формальный путь²⁾ вывода ЛГ-приближения состоит в использовании уравнения Риккати

$$v' + v^2 = f,$$

¹⁾ Оно называется также ВКБ (или ДВКБ)-приближением, см. стр. 291.
²⁾ Джеффрис и Свирлс (1969, § 17.122).

которое можно получить из (1.01) с помощью подстановки $w = \exp\left(\int v dx\right)$. Чтобы решить это уравнение, мы сначала отбросим слагаемое v' и получим, что $v \approx \pm f^{1/2} = v_1$. В качестве второго приближения имеем

$$v \approx \pm (f - v_1^2)^{1/2} = \pm f^{1/2} \left(1 \mp \frac{f'}{2f^{3/2}}\right)^{1/2} \approx f^{1/2} - \frac{f'}{4f},$$

при условии, что $|f'| \ll 2|f|^{3/2}$. Интегрирование последнего выражения приводит к формуле (1.08).

1.5. Преобразование, определяемое формулами (1.03) и (1.05), можно применить и к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{f(x) + g(x)\}w. \quad (1.09)$$

Тогда мы получим

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = \left(1 + \varphi + \frac{g}{f}\right)W, \quad (1.10)$$

где функция φ определяется равенством (1.07). Так же, как и раньше, если $|\varphi| \ll 1$ и $|g| \ll |f|$ в интересующей нас области, то можно надеяться, что выражение (1.08) приближает решения (1.09).

Мы можем, конечно, рассматривать коэффициент $f(x) + g(x)$ в (1.9) как одну функцию переменной x и использовать формулу (1.08), заменяя f на $f+g$. Однако когда коэффициент перед w разбивается на две части, часто можно получить лучшее приближение¹⁾; кроме того, упрощается вычисление интеграла в (1.08). Эти преимущества станут более очевидными ниже в §§ 4 и 5.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Применяя последовательные преобразования Лиувилля, доказать тождество Кейли

$$\{x, \xi\} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \{x, \xi\} + \{\xi, \xi\}.$$

Вывести формулу

$$\{x, \xi\} = -\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 \{\xi, x\}.$$

1.2. Показать, что если p — дважды дифференцируемая функция, а q — дифференцируемая функция, то уравнению

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + q \frac{dW}{dx} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{dq}{dx} + \frac{1}{4} q^2 - p - p^{1/4} \frac{d^2}{dx^2} (p^{-1/4}) \right\} W = 0$$

¹⁾ Первым это отметил, по-видимому, Джеффрис (1924).

удовлетворяет функция

$$W = p^{-1/4} \exp \left(\pm \int p^{1/2} dx - \frac{1}{2} \int q dx \right).$$

1.3. Показать, что приближение (1.08) является точным тогда и только тогда, когда $f = (ax + b)^{-4}$, где a и b — постоянные.

1.4. Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \alpha(\alpha - 1)x^{-2}w,$$

в котором α — большая положительная постоянная; показать, что при $g(x) = 0$ (см. (1.09)) отношение ЛГ-функций к соответствующим точным решениям близко к единице, если $-8\alpha \ll \ln x \ll 8\alpha$. Показать также, что при $g(x) = -x^{-2}/4$ ЛГ-функции являются точными решениями.

§ 2. Оценки остаточных членов: действительные переменные

2.1. Рассуждения, приведшие к формуле (1.08), были чисто формальными. Основным допущением было предположение о том, что решения дифференциального уравнения (1.06) или, в более общем случае, (1.10), не отличаются существенно от решений упрощенного уравнения $d^2 W/d\xi^2 = W$. Следующая теорема дает строгое обоснование в случае решения экспоненциального типа. Вторая теорема (§ 2.4) относится к осцилляторному случаю.

Теорема 2.1. Пусть в заданном конечном или бесконечном интервале (a_1, a_2) функция $f(x)$ положительна, действительна и дважды дифференцируема, $g(x)$ — непрерывная действительная или комплексная функция и

$$F(x) = \int \left\{ \frac{1}{f^{1/4}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{f^{1/4}} \right) - \frac{g}{f^{1/2}} \right\} dx. \quad (2.01)$$

Тогда в этом интервале дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \{f(x) + g(x)\}w \quad (2.02)$$

имеет дважды непрерывно дифференцируемые решения

$$\begin{aligned} w_1(x) &= f^{-1/4}(x) \exp \left\{ \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 \div \varepsilon_1(x)\}, \\ w_2(x) &= f^{-1/4}(x) \exp \left\{ - \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 \div \varepsilon_2(x)\}, \end{aligned} \quad (2.03)$$

такие, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_j(x)| &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{V}_{a_j, x}(F) \right\} - 1, \\ \frac{1}{2} f^{-1/2}(x) |\varepsilon'_j(x)| &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{V}_{a_j, x}(F) \right\} - 1 \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.04)$$

при условии $\mathcal{U}_{a_j^*}(F) < \infty$. Если функция $g(x)$ действительна, то решения также действительны.

Интеграл (2.01) будет далее называться *функцией контроля ошибки* для решений (2.02). Достаточно доказать теорему в случае $j = 1$; соответствующий результат для $j = 2$ можно будет получить, заменяя в (2.03) x на $-x$.

2.2. Мы начнем доказательство теоремы 2.1 с применения преобразований (1.05) и $w = f^{-1/4}(x)W$. Уравнение (2.02) принимает вид

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} = \{1 + \psi(\xi)\} W, \quad (2.05)$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{g}{f} - \frac{1}{f^{3/4}} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{f^{1/4}} \right) \quad (2.06)$$

(ср. (1.07) и (1.10)). Выбор постоянной интегрирования в (1.05) несуществен: он влияет лишь на величину постоянного множителя, на который умножается окончательное решение. Поскольку функция f положительна, ξ является возрастающей функцией x . Положим $\xi = \alpha_1$ и $\xi = \alpha_2$ в точках $x = a_1$ и $x = a_2$ соответственно; тогда при сделанных предположениях $\psi(\xi)$ непрерывна в (α_1, α_2) .

Подставив в (2.05)

$$W(\xi) = e^{\xi} \{1 + h(\xi)\}, \quad (2.07)$$

получим

$$h''(\xi) + 2h'(\xi) - \psi(\xi)h(\xi) = \psi(\xi). \quad (2.08)$$

Чтобы решить это неоднородное дифференциальное уравнение относительно $h(\xi)$, мы рассмотрим член $\psi(\xi)h(\xi)$ как поправку и перенесем его в правую часть. Применяя метод вариации параметров (или постоянных), мы найдем, что

$$h(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + h(v)\} dv. \quad (2.09)$$

Можно проверить дифференцированием, что любое дважды дифференцируемое решение этого интегрального уравнения Вольтерра удовлетворяет уравнению (2.08).

Уравнение (2.09) можно решить методом последовательных приближений, использованным в главе 5, § 1. Прежде всего, мы предположим, что точка α_1 конечна, а функция $\psi(\xi)$ непрерывна в α_1 . Определим последовательность $h_s(\xi)$, $s = 0, 1, \dots$, соотношениями $h_0(\xi) = 0$ и

$$h_s(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + h_{s-1}(v)\} dv \quad (s \geq 1); \quad (2.10)$$

В частности,

$$h_1(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) dv. \quad (2.11)$$

Поскольку $\xi - v \geq 0$, мы имеем

$$0 \leq 1 - e^{2(v-\xi)} < 1. \quad (2.12)$$

Следовательно ¹⁾, $|h_1(\xi)| \leq \frac{1}{2} \Psi(\xi)$, где

$$\Psi(\xi) = \int_{\alpha_1}^{\xi} |\psi(v)| dv.$$

Предположим теперь, что для некоторого значения s

$$|h_s(\xi) - h_{s-1}(\xi)| \leq \Psi^s(\xi) / (s! 2^s) \quad (2.13)$$

как, например, в случае $s = 1$. Из (2.10) имеем

$$\begin{aligned} h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{h_s(v) - h_{s-1}(v)\} dv \quad (s \geq 1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Следовательно,

$$|h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi)| \leq \frac{1}{s! 2^{s+1}} \int_{\alpha_1}^{\xi} |\psi(v)| \Psi^s(v) dv = \frac{\Psi^{s+1}(\xi)}{(s+1)! 2^{s+1}}.$$

Поэтому неравенство (2.13) можно доказать по индукции для всех s . Так как функция $\Psi(\xi)$ ограничена, когда ξ конечно, ряд

$$h(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi)\} \quad (2.15)$$

сходится равномерно в любом компактном интервале изменения ξ . То, что $h(\xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.09), теперь можно установить, суммируя выражения (2.14) и используя формулу (2.11).

Чтобы доказать, что функция $h(\xi)$ дважды дифференцируема, достаточно убедиться в равномерной сходимости ряда

¹⁾ Равенство имеет место в случае $\xi = \alpha_1$.

$\sum \{h_{s+1}''(\xi) - h_s''(\xi)\}$. Дифференцируя (2.11) и (2.14), мы получаем

$$h_1'(\xi) = \int_{\alpha_1}^{\xi} e^{2(\sigma-\xi)} \psi(v) dv, \quad (2.16)$$

$$h_{s+1}'(\xi) - h_s'(\xi) = \int_{\alpha_1}^{\xi} e^{2(\sigma-\xi)} f(v) \{h_s(v) - h_{s-1}(v)\} dv.$$

Используя неравенство (2.13) и оценку $|e^{2(\sigma-\xi)}| \leq 1$, находим, что

$$|h_{s+1}'(\xi) - h_s'(\xi)| \leq \frac{\Psi^{s+1}(\xi)}{(s+1)! 2^s} \quad (s = 0, 1, \dots). \quad (2.17)$$

Этим устанавливается равномерная сходимость ряда $\sum \{h_{s+1}'(\xi) - h_s'(\xi)\}$ в любом компактном интервале. Для второго дифференцирования мы используем соотношения

$$h_1''(\xi) = -2h_1'(\xi) + \psi(\xi),$$

$$h_{s+1}''(\xi) - h_s''(\xi) = -2\{h_{s+1}'(\xi) - h_s'(\xi)\} + \psi(\xi)\{h_s(\xi) - h_{s-1}(\xi)\}.$$

Суммируя все сказанное, мы видим, что уравнению (2.05) удовлетворяет функция (2.07), в которой $h(\xi)$ задается формулой (2.15). Применяя оценки (2.13) и (2.17) к ряду (2.15) и к его производной, нетрудно установить неравенства

$$|h(\xi)|, \frac{1}{2}|h'(\xi)| \leq e^{\Psi(\xi)/2} - 1. \quad (2.18)$$

Возвращаясь к переменной x с помощью дифференциального соотношения $d\xi = f^{1/2}dx$, мы находим, что выражение $-\int \psi(\xi) d\xi$ равно функции контроля ошибки $F(x)$. Поэтому $\Psi(\xi) = \mathcal{P}_{\alpha_1, x}(F)$, и неравенства (2.18) превращаются в искомые оценки (2.04).

2.3. Остается рассмотреть следующие случаи: 1) значение α_1 конечно, а функция $\psi(\xi)$ разрывна при $\xi = \alpha_1$, и 2) $\alpha_1 = -\infty$. Заметим, что функции $h_s(\xi)$ определяются теперь через интегралы с бесконечными пределами. Однако, по предположению, интеграл $\int_{\alpha_1}^{\xi} |\psi(v)| dv$ сходится, и это гарантирует (абсолютную) сходимость всех интегралов, встречающихся в выкладках. Тот факт, что ряд (2.15) удовлетворяет соотношению (2.09), можно установить, воспользовавшись наличием мажорирующего ряда (глава 2, § 8.2). Остальная часть доказательства проводится, как и раньше.

Следует отметить, что в силу оценок (2.04) решение $w_1(x)$ удовлетворяет условиям (см. формулу (2.03))

$$\varepsilon_1(x) \rightarrow 0, \quad f^{-1/2}(x) \varepsilon'_1(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a_1 + 0). \quad (2.19)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для второго решения.

2.4. Соответствующая теорема для уравнений с решениями осцилляторного типа формулируется следующим образом.

Теорема 2.2. *Предположим, что выполняются условия теоремы 2.1 и a — произвольная конечная или бесконечная точка из замыкания (a_1, a_2) . Тогда в (a_1, a_2) дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{-f(x) + g(x)\} w \quad (2.20)$$

имеет дважды дифференцируемые решения

$$\begin{aligned} w_1(x) &= f^{-1/4}(x) \exp \left\{ i \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_1(x)\}, \\ w_2(x) &= f^{-1/4}(x) \exp \left\{ -i \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_2(x)\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

такие, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_j(x)| &\leq \exp \{ \mathcal{Y}_{a,x}(F) \} - 1, \\ f^{-1/2}(x) |\varepsilon'_j(x)| &\leq \exp \{ \mathcal{Y}_{a,x}(F) \} - 1 \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

при условии $\mathcal{Y}_{a,x}(F) < \infty$. Если функция $g(x)$ действительна, то решения $w_1(x)$ и $w_2(x)$ являются комплексно сопряженными.

Доказательство аналогично. Интегральное уравнение, соответствующее (2.09), имеет вид

$$h(\xi) = \frac{1}{2i} \int_a^\xi \{1 - e^{2i(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + h(v)\} dv, \quad (2.23)$$

где α есть значение ξ в точке $x = a$. Отсутствие коэффициента $1/2$ перед вариацией в (2.22) по сравнению с (2.04) обусловлено тем, что наилучшая оценка ядра в формуле (2.23) имеет вид $|1 - e^{2i(v-\xi)}| \leq 2$.

Выбор точки a фиксирует начальные условия, которым удовлетворяют решения:

$$\varepsilon_j(x) \rightarrow 0, \quad f^{-1/2}(x) \varepsilon'_j(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a, j = 1, 2).$$

Аналогичной свободы выбора нет в теореме 2.1, поскольку неравенство (2.12) не выполняется при $\xi < v$.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Заменим условия непрерывности $f''(x)$ и $g(x)$ на условия кусочной непрерывности так, чтобы $f(x)$ и $f'(x)$ остались непрерывными. Показать, что теоремы 2.1 и 2.2 и в этом случае будут справедливыми, если исключить утверждение о непрерывности вторых производных решений.

2.2. Показать, что в теореме 2.1 величина $\frac{1}{2} |e_j(x) + (-1)^{j-1} f^{-1/2}(x) \times \times e'_j(x)|$ ограничена правой частью неравенства (2.04), а в теореме 2.2 величина $|e_j(x) + (-1)^j i f^{-1/2}(x) e'_j(x)|$ ограничена правой частью неравенства (2.22). (Это полезно для вычисления производной функции $f^{1/4}(x) w_1(x)$.)

2.3. Пусть a и b — произвольные положительные числа. Показать, что в $[a, \infty)$ уравнение

$$w''(x) = (e^{2x} + 2ib \cos x) w(x)$$

имеет решения $\rho_1(x) \exp\left(-\frac{1}{2}x + e^x\right)$ и $\rho_2(x) \exp\left(-\frac{1}{2}x - e^x\right)$, где

$$|\rho_1(x) - 1| \leq \exp\{(b^2 + 1/64)^{1/2}(e^{-a} - e^{-x})\} - 1,$$

$$|\rho_2(x) - 1| \leq \exp\{(b^2 + 1/64)^{1/2} e^{-x}\} - 1.$$

2.4. Показать, что если $w''(x) = (1 + x^{-3}/10)w(x)$, $w(1) = 1$ и $w'(1) = 0$, то

$$w(2) = \{w_2(2)w'_1(1) - w_1(2)w'_2(1)\} / \{w_2(1)w'_1(1) - w_1(1)w'_2(1)\},$$

где функции $w(x)$ и $w_2(x)$ задаются равенствами (2.03) при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Вычислить приближенное значение $w(2)$ и оценить максимальную ошибку этого результата.

2.5. Показать с помощью упр. 2.2, что при действительной функции $g(x)$ уравнение (2.20) имеет общее решение

$$w(x) = A f^{-1/4}(x) [\sin\{\int f^{1/2}(x) dx + \delta\} + e(x)],$$

в котором A и δ — постоянные и

$$|e(x)|, f^{-1/2}(x) |e'(x)| \leq \exp\{\mathcal{Y}_{a, x}(F)\} - 1.$$

Показать, что если a_1 и a_2 конечны, а значения $w(a_1)$ и $w(a_2)$ заданы (граничная задача), то

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(a_2)}{f(x)} \right\}^{1/4} \frac{\sin \left\{ \int_{a_1}^x f^{1/2}(t) dt \right\} + e_1(x)}{\sin c + e_1(a_2)} w(a_2) + \\ + \left\{ \frac{f(a_1)}{f(x)} \right\}^{1/4} \frac{\sin \left\{ \int_x^{a_2} f^{1/2}(t) dt \right\} + e_2(x)}{\sin c + e_2(a_1)} w(a_1), \end{aligned}$$

где $c = \int_{a_1}^{a_2} f^{1/2}(t) dt$ и $|e_j(x)| \leq \exp\{\mathcal{Y}_{a_j, x}(F)\} - 1$.

§ 3. Асимптотические свойства относительно независимой переменной

3.1. Из соотношения (2.19) можно извлечь следующую информацию о поведении в концевой точке a_1 решения $w_1(x)$, введенного в теореме 2.1:

$$w_1(x) \sim f^{-1/4} \exp\left(\int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_1 + 0); \quad (3.01)$$

аналогично,

$$w_2(x) \sim f^{-1/4} \exp\left(-\int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_2 - 0). \quad (3.02)$$

Эти результаты справедливы независимо от того, конечны или нет значения a_1 и a_2 ; они не зависят также и от того, остаются или нет функции f и $|g|$ ограниченными при приближении к точкам a_1 и a_2 . Для справедливости этих результатов достаточно, чтобы функция контроля ошибки $F(x)$ имела ограниченную вариацию в (a_1, a_2) .

В интересном случае, когда интеграл $\int f^{1/2} dx$ не ограничен при стремлении x к концевой точке, естественно поставить вопрос, существуют ли решения, назовем их $w_3(x)$ и $w_4(x)$, с дополнительными свойствами

$$w_3(x) \sim f^{-1/4} \exp\left(\int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_2 - 0), \quad (3.03)$$

$$w_4(x) \sim f^{-1/4} \exp\left(-\int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_1 + 0). \quad (3.04)$$

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала поведение решения $w_1(x)$ в точке a_2 .

3.2. Теорема 3.1. *Предположим, в дополнение к условиям теоремы 2.1, что $\mathcal{V}_{a_1, a_2}(F) < \infty$ и $\int f^{1/2} dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a_2 - 0$. Тогда*

$$e_1(x) \rightarrow a \quad (a - \text{постоянная}), f^{-1/2}(x) e_1'(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a_2 - 0). \quad (3.05)$$

Из теоремы 2.1 мы знаем, что величина $|e_1(x)|$ ограничена в (a_1, a_2) . Смысл сформулированной теоремы состоит в том, что $e_1(x)$ не может неограниченно осциллировать, когда x стремится к a_2 . Доказательство приведено ниже.

В настоящем случае $\alpha_2 = \infty$ (ср. (1.05)). Для любого малого положительного числа η найдется такое $\gamma \in (\alpha_1, \infty)$, что

$$\int_{\gamma}^{\infty} |\psi(v)| dv = \eta.$$

Предположим, что $\xi \geq \gamma$. Тогда, разбивая область интегрирования в первом выражении (2.16) на две части точкой γ , мы видим, что

$$|h_1'(\xi)| \leq \int_{\alpha_1}^{\gamma} e^{2(\gamma-\xi)} |\psi(v)| dv + \int_{\gamma}^{\xi} |\psi(v)| dv \leq e^{2(\gamma-\xi)} \Psi(\gamma) + \eta.$$

Аналогично из (2.13) и второго соотношения (2.16) получаем

$$|h_{s+1}'(\xi) - h_s'(\xi)| \leq \frac{e^{2(\gamma-\xi)} \Psi^{s+1}(\gamma)}{(s+1)! 2^s} + \frac{\Psi^s(\infty)}{s! 2^s} \eta \quad (s \geq 1).$$

Суммирование дает неравенство

$$|h'(\xi)| \leq 2e^{2(\gamma-\xi)} \{e^{\Psi(\gamma)/2} - 1\} + e^{\Psi(\infty)/2} \eta.$$

Первый член в правой части стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. А поскольку число η произвольно, то отсюда следует соотношение $h'(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, эквивалентное второй формуле в (3.05).

Далее, из (2.11) и (2.14) — (2.16) мы имеем

$$h(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} l_s(\xi) - \frac{1}{2} h'(\xi), \quad (3.06)$$

где

$$l_0(\xi) = \int_{\alpha_1}^{\xi} \psi(v) dv, \quad l_s = \int_{\alpha_1}^{\xi} \psi(v) \{h_s(v) - h_{s-1}(v)\} dv \quad (s \geq 1). \quad (3.07)$$

При $\xi \geq \gamma$ мы можем, как и раньше, получить из (2.13), воспользовавшись возрастанием функции $\Psi(\xi)$, неравенство

$$|l_s(\xi) - l_s(\gamma)| \leq \frac{\Psi^s(\xi)}{s! 2^s} \int_{\gamma}^{\xi} |\psi(v)| dv \quad (s \geq 0).$$

Поэтому

$$|h(\xi) - h(\gamma)| \leq \frac{1}{2} e^{\Psi(\xi)/2} \{\Psi(\xi) - \Psi(\gamma)\} + |h'(\xi) - h'(\gamma)|. \quad (3.08)$$

Правая часть стремится к нулю, когда ξ и γ независимо друг от друга стремятся к бесконечности; следовательно, $h(\xi)$ стремится к постоянному предельному значению. Этим устанавливается первая из формул (3.05), и доказательство теоремы 3.1 закончено. В силу симметрии аналогичный результат верен для $w_2(x)$ в a_1 .

3.3. В заключение доказательства теоремы 3.1 мы укажем, каким образом можно получить информацию о способе приближения $\varepsilon_1(x)$ к пределу $\varepsilon_1(a_2)$, например, при $x \rightarrow a_2 - 0$. Полагая $\xi \rightarrow \infty$ в (3.08) и заменяя затем γ на ξ , мы получаем

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(x) - \varepsilon_1(a_2)| &= |h(\xi) - h(\infty)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} e^{\Psi(\infty)/2} \{\Psi(\infty) - \Psi(\xi)\} + \frac{1}{2} |h'(\xi)|. \end{aligned} \quad (3.09)$$

Из (2.13) и (2.16) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} |h'_1(\xi)| &\leq \int_{\alpha_1}^{\xi} e^{2(\gamma-\xi)} |\psi(v)| dv, \\ |h'_{s+1}(\xi) - h'_s(\xi)| &\leq \frac{\Psi^s(\infty)}{s! 2^s} \int_{\alpha_1}^{\xi} e^{2(\gamma-\xi)} |\psi(v)| dv. \end{aligned}$$

Суммирование и подстановка в (3.09) дают

$$|\varepsilon_1(x) - \varepsilon_1(a_2)| \leq \leq \frac{1}{2} e^{\Psi(\infty)/2} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |\Psi(v)| dv + \int_{a_1}^{\infty} e^{2(v-\xi)} |\Psi(v)| dv \right\}. \quad (3.10)$$

Дальнейшие свойства зависят от поведения $\Psi(v)$ при $v \rightarrow \infty$: один из примеров будет приведен ниже в § 4.1.

3.4. Теперь мы вернемся к вопросу, поставленному в § 3.1. Пусть $\varepsilon_1(a_2)$ снова обозначает предельное значение $\varepsilon_1(x)$ при $x \rightarrow a_2 = 0$. Тогда из (2.03) мы имеем

$$w_1(x) \sim \{1 - \varepsilon_1(a_2)\} f^{-1/4} \exp\left(\int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_2 = 0), \quad (3.11)$$

при условии, что $\varepsilon_1(a_2) \neq -1$. Фактическое значение $\varepsilon_1(a_2)$ нашей теорией не дается, но оценку можно получить из (2.04) при $j = 1$ и $x = a_2$. Если интересоваться только исследованием асимптотического поведения решений дифференциального уравнения в a_2 , то можно заменить a_1 любой удобной точкой \hat{a}_1 из интервала (a_1, a_2) . Эта замена, конечно, отразится на $w_1(x)$ и $\varepsilon_1(a_2)$, однако соотношение (3.11) останется справедливым. Полагая значение \hat{a}_1 достаточно близким к a_2 , мы можем сделать величину $\mathcal{W}_{\hat{a}_1, a_2}(F)$ произвольно малой, гарантировав тем самым, что $1 + \varepsilon_1(a_2)$ не обращается в нуль. После этого деление обеих частей (3.14) на $1 + \varepsilon_1(a_2)$ показывает, что решение $w_3(x)$ со свойством (3.03) существует.

Поскольку выбор \hat{a}_1 в предыдущей конструкции произволен (до некоторой степени), решение $w_3(x)$ не единственно. Таким образом, ситуация в концевых точках аналогична той, с которой мы встречались в главе 5, § 7. В точке a_2 решение $w_3(x)$, удовлетворяющее соотношению (3.03), является *доминирующим*, но не *единственным*; решение же, удовлетворяющее (3.02), — *подчиненное и единственное*. Аналогичные утверждения справедливы для решений $w_1(x)$ и $w_4(x)$ в точке a_1 .

3.5. В случае теоремы 2.2 получаются результаты, отличные от общего случая остаточные члены $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ осциллируют от приведенных. Например, если $\int f^{1/2} dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a_2 = 0$, при $x \rightarrow a_2 = 0$. Далее, решение, удовлетворяющее одному из условий

$$w(x) \sim f^{-1/4} \exp\left(\pm i \int f^{1/2} dx\right) \quad (x \rightarrow a_2 = 0), \quad (3.12)$$

является *единственным*. Оба эти утверждения можно проверить,

представляя общее решение дифференциального уравнения в виде линейной комбинации решений, описываемых теоремой 2.2.

3.6. Рассмотрим в качестве примера решения уравнения

$$w'' = (x + \ln x)w \quad (3.13)$$

при $x \rightarrow \infty$. Мы не можем взять $f = x$ и $g = \ln x$, поскольку интеграл $\int g f^{-1/2} dx$ расходится при $a_2 = \infty$. Поэтому мы положим $f = x + \ln x$ и $g = 0$. Легко видеть, что при больших x функция $f^{-1/2} (f^{-1/4})''$ имеет порядок $O(x^{-5/2})$. Следовательно, $\mathcal{U}(F)$ сходится в ∞ , и асимптотические решения уравнения (3.13) имеют вид

$$(x + \ln x)^{-1/4} \exp \left\{ \pm \int (x + \ln x)^{1/2} dx \right\}.$$

Этот результат можно упростить. При больших x имеем

$$(x + \ln x)^{1/2} = x^{1/2} + \frac{1}{2} x^{-1/2} \ln x + O\{x^{-1/2} (\ln x)^2\}.$$

Следовательно,

$$\int (x + \ln x)^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + x^{1/2} \ln x - 2x^{1/2} + \text{const} + o(1).$$

В соответствии с этим уравнение (3.13) имеет единственное решение $w_2(x)$ такое, что

$$w_2(x) \sim x^{-1/4 - \sqrt{x}} \exp \left(2x^{1/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

и единственное решение $w_3(x)$ такое, что

$$w_3(x) \sim x^{-1/4 + \sqrt{x}} \exp \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1 и, кроме того, $\mathcal{U}_{a_1, a_2}(F) < \infty$, $\int f^{1/2} dx \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a_2 - 0$ и $\int f^{1/2} dx \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow a_1 + 0$. Рассматривая вронскиан относительно ξ функций $f^{1/4} w_1$ и $f^{1/4} w_2$, доказать, что $e_1(a_2) = e_2(a_1)$.

3.2. Показать, что уравнение $w'' - \frac{1}{2} w' + \left(\frac{1}{16} + x - e^x \right) w = 0$ имеет решения вида $\{1 + O(xe^{-x/2})\} \exp(-2e^{x/2})$ и $\{1 + o(1)\} \exp(2e^{x/2})$ при $x \rightarrow \infty$.

3.3. Показать, что уравнение $w'' + (2x^{-3} + x^{-4})w = 0$ имеет два комплексно сопряженных решения вида

$$x^{1 \mp i} e^{\pm i/x} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\pm i - 1)x + O(x^2) \right\} \quad \text{при } x \rightarrow +0.$$

§ 4. Сходимость $\mathcal{V}(F)$ в особой точке

4.1. Если a_2 — конечная точка, то достаточные условия ограниченности $\mathcal{V}(F)$ в a_2 имеют вид

$$f(x) \sim \frac{c}{(a_2 - x)^{2\alpha+2}}, \quad g(x) = O\left\{\frac{1}{(a_2 - x)^{\alpha+\beta+2}}\right\} \quad (x \rightarrow a_2 - 0), \quad (4.01)$$

где c , α и β — положительные постоянные, при условии, что первое из этих соотношений является дважды дифференцируемым. Тогда

$$f^{-1/4}(f^{-1/4})' = O\{(a_2 - x)^{\alpha-1}\}, \quad gf^{-1/2} = O\{(a_2 - x)^{\beta-1}\} \quad (4.02)$$

(ср. (1.07)). В соответствии с этим $F'(x) = O\{(a_2 - x)^{\delta-1}\}$, где $\delta = \min(\alpha, \beta)$. Поскольку $\delta > 0$, мы получаем неравенство $\mathcal{V}_{x, a_2}(F) < \infty$, которое дает возможность применить теоремы 2.1, 2.2 и 3.1.

В случае теорем 2.1 и 3.1 более точную информацию, касающуюся предельного поведения $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ в точке a_2 , можно получить следующим образом. Из (4.02) вытекает соотношение $\mathcal{V}_{x, a_2}(F) = O\{(a_2 - x)^\delta\}$. Следовательно,

$$\varepsilon_2(x) = O\{(a_2 - x)^\delta\} \quad (x \rightarrow a_2 - 0) \quad (4.03)$$

(ср. (2.04)). Далее, из (1.05), (2.06) и (4.02) мы получаем, что

$$\xi \sim \frac{c^{1/2}}{\alpha(a_2 - x)^\alpha}, \quad \psi(\xi) = O\left\{\frac{1}{\xi^{1+(\delta/\alpha)}}\right\} \quad (x \rightarrow a_2 - 0). \quad (4.04)$$

Поэтому в неравенстве (3.16) первый интеграл в скобках имеет порядок $O(\xi^{-\delta/\alpha})$ для больших ξ . Разбивая интервал (α_1, ξ) на две части точкой $\frac{1}{2}\xi$, мы видим, что второй интеграл ограничен выражением

$$e^{-\xi} \int_{\alpha_1}^{\xi/2} |\psi(v)| dv + O\left(\frac{1}{\xi^{1+(\delta/\alpha)}}\right) \int_{\xi/2}^{\xi} e^{2(v-\xi)} dv,$$

т. е. имеет порядок $O(\xi^{-1-(\delta/\alpha)})$. Следовательно, вся правая часть (3.10) имеет порядок $O(\xi^{-\delta/\alpha})$. Поэтому

$$\varepsilon_1(x) - \varepsilon_1(a_2) = O\{(a_2 - x)^\delta\} \quad (x \rightarrow a_2 - 0). \quad (4.05)$$

Соотношения (4.03) и (4.05) являются искомыми уточнениями поведения $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ в точке a_2 .

Следует отметить, что условия (4.01) включают случай, когда дифференциальное уравнение (2.02) или (2.20) имеет в a_2 ир-

регулярную особую точку произвольного ранга α ; сравните главу 5, § 4.1¹⁾.

4.2. Аналогичным образом, если $a_2 = \infty$, то достаточными условиями выполнения неравенства $\mathcal{W}_{x, \infty}^*(F) < \infty$ являются соотношения

$$f(x) \sim cx^{2\alpha-2}, \quad g(x) = O(x^{\alpha-\beta-2}) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4.06)$$

где c , α и β — положительные постоянные. Первое из этих соотношений снова должно быть дважды дифференцируемым: если $\alpha = 3/2$, то мы считаем, что $f'(x) \rightarrow c$ и $f''(x) = O(x^{-1})$; когда $\alpha = 1$, то мы требуем, чтобы $f'(x) = O(x^{-1})$ и $f''(x) = O(x^{-2})$. Эти условия охватывают случай иррегулярной особой точки произвольного ранга α на бесконечности.

Рассуждая, как и при выводе формул (4.03) и (4.05), мы получаем

$$\varepsilon_2(x) = O(x^{-\delta}), \quad \varepsilon_1(x) - \varepsilon_1(\infty) = O(x^{-\delta}) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4.07)$$

где снова $\delta = \min(\alpha, \beta)$.

4.3. Теперь мы рассмотрим вопрос о том, справедливо ли ЛГ-приближение в регулярных особых точках. По определению (глава 5, § 4.1) точка a_2 является регулярной особой точкой уравнения

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = q(x)w, \quad (4.08)$$

если функция $q(x)$ может быть разложена в ряд вида

$$q(x) = \frac{1}{(a_2 - x)^2} \sum_{s=0}^{\infty} q_s (a_2 - x)^s,$$

сходящийся в окрестности a_2 . Уравнение (4.08) можно записать в стандартном виде, входящем в формулировки теорем 2.1 или 2.2, произвольно разбивая $q(x)$ на две функции, т. е.

$$q(x) = \pm f(x) + g(x),$$

где

$$f(x) = \frac{1}{(a_2 - x)^2} \sum_{s=0}^{\infty} f_s (a_2 - x)^s, \quad g(x) = \frac{1}{(a_2 - x)^2} \sum_{s=0}^{\infty} g_s (a_2 - x)^s \quad (4.09)$$

и $\pm f_s + g_s = q_s$. Мы предположим, что числа f_s действительны и $f_0 \geq 0$ (поскольку функция $f(x)$ должна быть положительной).

¹⁾ Обозначения f и g используются теперь в другом смысле.

Допустим сначала, что $f_0 \neq 0$. Тогда для достаточно малых $|a_2 - x|$ имеем

$$f^{-1/4} (f^{-1/4})'' - g f^{-1/2} = \frac{1}{a_2 - x} \sum_{s=0}^{\infty} g_s (a_2 - x)^s,$$

где коэффициенты c_s зависят от f_s и g_s ; в частности, $c_0 = -(q_0 + 1/4)f_0^{-1/2}$. Ясно, что для сходимости $\mathcal{Y}_{x,a_2}(F)$ необходимым и достаточным является выполнение условия $c_0 = 0$. Исключая случай $q_0 = -1/4$, этого можно добиться, полагая $g_0 = -1/4$ и $f_0 = |q_0 + 1/4|$. Если $q_0 > -1/4$, то применимы соотношения (3.02) и (3.11); если же $q_0 < -1/4$, то применимо соотношение (3.12).

В исключительном случае $q_0 = -1/4$ функции f и g нельзя выбрать так, чтобы $\mathcal{Y}_{x,a_2}(F) < \infty$. Поэтому предположим, что f_r ($r \geq 1$) — первый не равный нулю коэффициент в разложении (4.09) функции $f(x)$. Поскольку $g_0 = -1/4$, то имеем

$$f^{-1/4} (f^{-1/4})'' - g f^{-1/2} \sim \frac{1}{16} r^2 f_r^{-1/2} (a_2 - x)^{-(r/2)-1} (x \rightarrow a_2 - 0).$$

Следовательно, $\mathcal{Y}_{x,a_2}(F) = \infty$. Если $q_0 = -1/4$, то некоторые усложнения возникают и в теории, изложенной в главе 5, §§ 4 и 5, поскольку определяющее уравнение имеет в этом случае равные корни.

Аналогичные рассуждения и выводы справедливы также в случае, когда a_2 — регулярная особая точка, расположенная в $+\infty$; детали предоставляются читателю.

4.4. Основные результаты § 3 и настоящего параграфа можно объединить в следующем утверждении. При подходящем выборе функций f и g ЛГ-функции дают асимптотические представления доминирующего и подчиненного решений в окрестности иррегулярной особой точки произвольного ранга, а также в окрестности регулярной особой точки, если показатели в ней не равны.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Доказать, что при больших положительных x уравнение $w'' - x^2 w' + x^{-2} w = 0$ имеет независимые решения вида $1 + O(x^{-4})$ и $x^{-3} \exp(x^4/4) \{1 + O(x^{-4})\}$.

4.2. Пусть функция $q(x)$ непрерывна в $(0, b)$ и $\int_0^b x |q(x)| dx < \infty$; показать, что уравнение $w'' = q(x)w$ имеет решения вида $1 + o(1)$ и $x + o(x)$ при $x \rightarrow +0$.

4.3. Пусть функция $f(x)$ аналитична в конечной точке a и имеет в ней нуль произвольного порядка, а функция $g(x)$ ограничена при $x \rightarrow a$. Показать, что $\mathcal{Y}(F)$ расходится в a .

4.4*. Показать, что если $f > 0$, f'' непрерывна, $g=0$ и $\int_x^\infty |f^{-3/2} f''| dx < \infty$, то $\mathcal{V}_{x,\infty}(F) < \infty$ и $\int_x^\infty f^{1/2} dx = \infty$ [Коппель, 1965].

4.5*. Пусть $f > 0$, вторая производная f'' непрерывна, $g = 0$, $\mathcal{V}_{x,\infty}(F) < \infty$ и $\int_x^\infty f^{1/2} dx < \infty$; вывести из упр. 4.4, что $\int_x^\infty f^{-5/2} f'^2 dx = \infty$ и, следовательно, $f^{-3/2} f'' \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Из этих результатов и тождества $(f^{-1/4})' = \text{const} - \int_x^\infty f^{-1/4} (f^{-1/4})'' f^{1/4} dx$ вывести, что $f \sim dx^{-4}$ и $f' \sim -4dx^{-5}$ при $x \rightarrow \infty$, где d - положительная постоянная [Коппель, 1965].

§ 5. Асимптотические свойства относительно параметров

5.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{u^2 f(x) + g(x)\} w, \quad (5.01)$$

в котором u — положительный параметр, а функции $f(x)$ и $g(x)$ не зависят от u . Уравнениями этого типа удовлетворяют, например, различные специальные функции, рассмотренные в главах 2 и 5. Мы снова предположим, что в заданном интервале (a_1, a_2) функция $f(x)$ положительна, а $f''(x)$ и $g(x)$ — непрерывны. Применяя теорему 2.1 и отбрасывая не относящийся к сути дела множитель $u^{-1/2}$, мы видим, что уравнение (5.01) имеет решения

$$w_j(u, x) = f^{-1/4}(x) \exp \left\{ (-1)^{j-1} u \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_j(u, x)\} \\ (j = 1, 2),$$

так что

$$|\varepsilon_j(u, x)| \leq \exp \left\{ \frac{\mathcal{V}_{a_j, x}(F)}{2u} \right\} - 1, \\ \left| \frac{\varepsilon'_j(u, x)}{2uf^{1/2}(x)} \right| \leq \exp \left\{ \frac{\mathcal{V}'_{a_j, x}(F)}{2u} \right\} - 1. \quad (5.02)$$

Здесь штрих обозначает частное дифференцирование по x , а функция $F(x)$ снова определяется формулой (2.01). Поскольку $F(x)$ не зависит от u , правая часть (5.02) имеет порядок $O(u^{-1})$ при больших u и фиксированных x . Кроме того, если $\mathcal{V}_{a_1, a_2}(F) < \infty$, то член с символом порядка O является равномерным относительно x , поскольку $\mathcal{V}_{a_j, x}(F) \leq \mathcal{V}_{a_1, a_2}(F)$. Таким образом,

$$w_j(u, x) \sim f^{-1/4} \exp \{ (-1)^{j-1} u \int f^{1/2} dx \} \quad (u \rightarrow \infty) \quad (5.03)$$

равномерно в (a_1, a_2) .

Важное значение ЛГ-приближения вытекает из этого свойства и аналогичного результата, получающегося при применении теоремы 2.2 к уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{-u^2 f(x) + g(x)\} w. \quad (5.04)$$

Мы получили (5.03) как непосредственное следствие оценок остаточного члена, выведенных в теореме 2.1. Кроме того, как мы видели в § 4, эти оценки указывают на асимптотическое свойство приближения в окрестности особой точки дифференциального уравнения. В силу этой двойной асимптотической природы ЛГ-приближение является мощным средством для получения аппроксимирующих решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

5.2. Насколько оценки остаточных членов превосходят их фактические значения? Частичный ответ на этот вопрос дается асимптотическими выражениями для $\varepsilon_j(u, x)$ при $u \rightarrow \infty$. Вводя крышечки над буквами для того, чтобы отличать символы в настоящем случае от соответствующих символов в § 2, мы получаем

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= u\xi, \quad \hat{\alpha}_j = u\alpha_j, \quad \hat{\psi}(\hat{\xi}) = u^{-2}\psi(\xi), \\ \hat{\Psi}(\hat{\xi}) &= u^{-1}\Psi(\xi) = u^{-1}\mathcal{Y}_{\alpha_1, x}(F). \end{aligned}$$

Выделяя первый член разложения (2.15) и используя (2.11), мы видим, что

$$\varepsilon_1(u, x) \equiv \hat{\varepsilon}_1(x) = (2u)^{-1} \int_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\xi}} \hat{\psi}(v) dv = \theta_1(u, x) + \theta_2(u, x), \quad (5.05)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(u, x) &= (2u)^{-1} \int_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\xi}} e^{2u(v-\hat{\xi})} \hat{\psi}(v) dv, \\ \theta_2(u, x) &= \sum_{s=1}^{\infty} \{\hat{h}_{s+1}(\hat{\xi}) - \hat{h}_s(\hat{\xi})\}. \end{aligned}$$

Так как функция $\psi(v)$ непрерывна в (α_1, α_2) , метод Лапласа (глава 3, § 7) дает

$$\theta_1(u, x) = O(u^{-2}) \quad (u \rightarrow \infty),$$

исключая, возможно, случай $x = \alpha_2$. Из (2.13) вытекает неравенство

$$|\theta_2(u, x)| \leq \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\{\mathcal{Y}_{\alpha_1, x}^{(s)}(F)\}^s}{s! (2u)^s}.$$

Подстановка этих результатов в формулу (5.05) дает

$$\varepsilon_1(u, x) = -(2u)^{-1} \{F(x) - F(a_1)\} + O(u^{-2}) \quad (5.06)$$

при $u \rightarrow \infty$. Это и есть искомым результат.

Асимптотическая форма оценки (5.02) для $|\varepsilon_1(u, x)|$ имеет вид

$$|\varepsilon_1(u, x)| = (2u)^{-1} \mathcal{Y}_{a_1, x}(F) + O(u^{-2}).$$

Очевидно, что она тесно связана с формулой (5.06). Действительно, с точностью до $O(u^{-2})$ это выражение совпадает с абсолютной величиной (5.06) в случае, когда функция F монотонна в интервале (a_1, x) . В этих условиях оценка остаточного члена является особенно точной.

5.3. Дифференциальное уравнение может иметь особенность как в одной, так и в обеих концевых точках, причем формула (5.03) остается равномерно справедливой при условии, что $\mathcal{Y}(F)$ сходится в обеих концевых точках. Этот случай имеет место, например, тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям (4.01), если a_2 — конечная точка, или условиям (4.06), если $a_2 = \infty$.

Пусть теперь концевая точка, например, a_2 , является регулярной особой точкой. При малых $|a_2 - x|$ функции $f(x)$ и $g(x)$ могут быть разложены в сходящиеся степенные ряды

$$f(x) = \frac{1}{(a_2 - x)^2} \sum_{s=0}^{\infty} f_s (a_2 - x)^s,$$

$$g(x) = \frac{1}{(a_2 - x)^2} \sum_{s=0}^{\infty} g_s (a_2 - x)^s,$$

в которых коэффициенты f_s действительны и $f_0 \geq 0$. Предположим сначала, что $f_0 \neq 0$. Как и в § 4.3, мы можем показать, что $\mathcal{Y}(F)$ сходится в a_2 при $g_0 = -1/4$. Если $g_0 \neq -1/4$, то можно послучить сходящуюся вариацию, введя новый параметр

$$\hat{u} = \left\{ u^2 \pm f_0^{-1} \left(\frac{1}{4} + g_0 \right) \right\}^{1/2},$$

причем верхний значок относится к уравнению (5.01), а нижний — к уравнению (5.04). Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{ \pm \hat{u}^2 f(x) + \hat{g}(x) \} w,$$

где

$$\hat{g}(x) = g(x) - f_0^{-1} \left(\frac{1}{4} + g_0 \right) f(x).$$

В разложении $\widehat{g}(x)$ в ряд по возрастающим степеням разности $a_2 - x$ коэффициент перед $(a_2 - x)^{-2}$ равен $-1/4$; следовательно, вариация новой функции контроля ошибки сходится в a_2 .

Предположим теперь, что $f_0 = 0$, но $f_1 \neq 0$. В окрестности точки a_2

$$f^{-1/4} (f^{-1/4})'' - g f^{-1/2} = (a_2 - x)^{-3/2} \sum_{s=0}^{\infty} c_s (a_2 - x)^s,$$

где $c_0 = -(g_0 + 3/16) f_1^{-1/2}$. Поэтому $\mathcal{V}(F)$ сходится тогда и только тогда, когда $g_0 = -3/16$. Однако на этот раз мы не можем рассмотреть случай, когда $g_0 \neq -3/16$, с помощью простого переопределения параметра. Этот более сложный случай мы затрагивать не будем.

Если особенностями $f(x)$ и $g(x)$ являются полюсы, то результаты этого пункта можно суммировать следующим образом. Пусть в конечной точке a функция $f(x)$ имеет полюс порядка m , а $g(x)$ — полюс порядка n , причем если $n = 0$, то будем считать функцию $g(x)$ аналитической.

- 1) Если $m > 2$ и $0 \leq n < (1/2)m + 1$, то $\mathcal{V}(F)$ сходится в a .
- 2) Если $m = 2$ и $n = 0, 1$ или 2 , то с помощью переопределения параметра можно добиться того, чтобы $\mathcal{V}(F)$ сходилась в a .
- 3) Если $m = 1$, то $\mathcal{V}(F)$ расходится в a , за исключением особого случая, когда $g(x) \sim -\frac{3}{16} (x - a)^{-2}$ при $x \rightarrow a$.

Аналогичные результаты справедливы и в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ сингулярны в бесконечно удаленной точке.

5.4. Мы можем также исследовать некоторые дифференциальные уравнения, в которые параметр u входит иным образом. Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{u^2 f(u, x) + g(u, x)\} w. \quad (5.07)$$

Из теоремы 2.1 нетрудно вывести, что существуют решения $w(u, x)$ уравнения (5.07), которые удовлетворяют условию (5.03) равномерно относительно x при выполнении следующих условий для $x \in (a_1, a_2)$ и всех достаточно больших положительных u :

- 1) $f(u, x) > 0$;
- 2) $\partial^2 f(u, x) / \partial x^2$ и $g(u, x)$ — непрерывные функции x ;
- 3) $\mathcal{V}_{a_1, a_2}(F) = o(u)$ при $u \rightarrow \infty$.

Точки a_1 и a_2 могут зависеть от u .

Форма (5.07) охватывает, например, уравнения вида

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{u^2 f_0(x) + u f_1(x) + f_2(x)\} w,$$

в которых функции $f_s(x)$ не зависят от u . Очевидно, что мы

можем взять

$$f(u, x) = f_0(x) + u^{-1}f_1(x) + u^{-2}f_2(x), \quad g(u, x) = 0,$$

но могут оказаться предпочтительными и другие способы выбора, например

$$f(u, x) = f_0(x) + u^{-1}f_1(x), \quad g(u, x) = f_2(x)$$

или

$$f(u, x) = \left\{ f_0^{1/2}(x) + \frac{f_1(x)}{2uf_0^{1/2}(x)} \right\}^2, \quad g(u, x) = f_2(x) - \frac{f_1^2(x)}{4f_0(x)};$$

последняя форма имеет то преимущество, что для нее упрощается вычисление интеграла $\int f^{1/2}(u, x) dx$. Конечно, выбор $f(u, x)$ и $g(u, x)$ влияет на величину оценки остаточного члена. Может случиться так, что вариация $\mathcal{Y}_{n, a, 2}(F)$ расходится при одном выборе и сходится при другом. Очевидно, что предпочтителен тот выбор, при котором она сходится¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Показать, что оценка остаточного члена, получаемая при применении теоремы 2.2 к уравнению (5.04), превосходит фактическое значение $|\varepsilon_j(u, x)|$ приблизительно в два раза, когда параметр u велик, а функция F монотонна в (a, x) .

5.2. Предположим, что в окрестности начала координат

$$f(x) = x \sum_{s=0}^{\infty} f_s x^s, \quad g(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{s=0}^{\infty} g_s x^s,$$

где $f_0 \neq 0$. Показать, что $\mathcal{Y}(F)$ сходится в точке $x = 0$ тогда и только тогда, когда $g_0 = \frac{5}{16}$ и $g_1 = \frac{f_1}{8f_0}$.

5.3. Построив дифференциальное уравнение для $(x^3 - 1)^{1/2} Q_n^m(x)$, показать, что если значение m фиксировано, а n — велико и положительно, то функция Лежандра второго рода имеет вид

$$Q_n^m(\operatorname{ch} t) = \pi^{1/2} e^{m \pi i} n^{m-1/2} (2 \operatorname{sh} t)^{-1/2} e^{-(n+1/2)t} \{1 + O(n^{-1})\}$$

равномерно относительно $t \in [\delta, \infty)$, где δ — любая положительная постоянная.

5.4. Показать, что если a, x и u положительны, причем a фиксировано, а u — велико, то в $[a, \infty)$ уравнение $\frac{d^2 w}{dx^2} = (u^4 x^2 + u^2 x^4) w$ имеет решения вида

$$\{1 + O(u^{-2})\} x^{-1/2} (u^2 + x^2)^{-1/4} \exp \left\{ \pm \frac{1}{3} u (u^2 + x^2)^{3/2} \right\},$$

равномерные относительно x .

¹⁾ Интересный пример был дан Джеффрисом (1953, § 3.3).

Показать также, что интервал изменения x можно расширить до $[au^{-1/2}, \infty)$ при условии, что равномерно относительно x выражение $O(u^{-2})$ заменено на $O(u^{-1})$.

5.5. Показать, что при положительных x и u уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(1 + \frac{\cos u}{ux^{3/4}}\right) w$$

имеет решение вида $\{1 + \varepsilon(u, x)\} \exp(-x - 2u^{-1}x^{1/4}\cos u)$, где: 1) $\varepsilon(u, x) = O(x^{-1/2})$ при $x \rightarrow \infty$, и фиксировано, 2) $\varepsilon(u, x) = O(u^{-1}\cos u)$, когда $u \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [a, \infty)$, a — любая положительная постоянная.

§ 6. Пример: функции параболического цилиндра при больших значениях порядка

6.1. Дифференциальное уравнение для функций параболического цилиндра (функций Вебера) имеет вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left(\frac{x^2}{4} + a\right) w, \quad (6.01)$$

где a — параметр. Единственная особая точка находится на бесконечности; она нерегулярна и имеет ранг, равный 2. В соответствии с этим асимптотические решения при фиксированном a и большом x можно вывести из ЛП-приближения. Выбор $f = x^2/4$, $g = a$ является нецелесообразным (исключая случай $a = 0$), поскольку соответствующая функция контроля ошибки F расходуется на бесконечности. Вместо этого мы положим $f = (x^2/4) + a$, $g = 0$; тогда функция $f^{-1/4}(f^{-1/4})''$ асимптотически приближается к $3x^{-3/2}$ и $\mathcal{V}(F) < \infty$. Из результатов § 3 следует, что существуют решения уравнения (6.01), асимптотически ведущие себя как $f^{-1/4}e^{\pm \xi}$ при $x \rightarrow \infty$, где

$$\xi = \int \left(\frac{1}{4}x^2 + a\right)^{1/2} dx.$$

При больших x

$$\xi = \frac{1}{4}x^2 + a \ln x + \text{const} + O(x^{-2}).$$

Следовательно, асимптотическая форма решений сводится к постоянной, умноженной на $x^{a-1/2}e^{x^2/4}$ или на $x^{a-1/2}e^{-x^2/4}$.

Главное решение $U(a, x)$ определяется (полностью) условием

$$U(a, x) \sim x^{a-1/2}e^{-x^2/4} \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (6.02)$$

Как и все решения, оно является функцией, целой по x .

В применявшихся ранее обозначениях, введенных Уиттекером, функция $U(a, x)$ записывалась как $D_{-a-(1/2)}(x)$.

6.2. Как ведет себя функция $U(a, x)$ при $a \rightarrow +\infty$? Если мы применим результаты § 5, положив $u^2 = a$, $f = 1$ и $g = x^2/4$, то

соответствующая вариация $\mathcal{V}(F)$ расходится на бесконечности. Следовательно, этот подход дает асимптотические приближения для больших a , справедливые лишь в компактных интервалах изменения x .

Чтобы вывести приближение, которое равномерно справедливо для неограниченных действительных x , мы снова положим $f = (x^2/4) + a$. Переменные удобно отделить друг от друга, положив $a = u/2$ и $x = (2u)^{1/2}t$.

Уравнение (6.01) принимает вид

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = u^2 (t^2 + 1) w.$$

В силу § 5.1 решение, подчиненное при $t \rightarrow +\infty$, дается формулой

$$w(u, t) = (t^2 + 1)^{-1/4} \exp\{-u\hat{\xi}(t)\} \{1 + \varepsilon(u, t)\},$$

где

$$\hat{\xi}(t) = \int (t^2 + 1)^{1/2} dt = \frac{1}{2} t (t^2 + 1)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \{t + (t^2 + 1)^{1/2}\}. \quad (6.03)$$

Остаточный член удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon(u, t)| \leq \exp\{(2u)^{-1} \mathcal{V}_{t, \infty}(F)\} - 1, \quad (6.04)$$

в котором

$$F(t) = \int (t^2 + 1)^{-1/4} \{(t^2 + 1)^{-1/4}\}'' dt = - \int \frac{3t^2 - 2}{4(t^2 + 1)^{5/2}} dt = - \frac{t^3 + 6t}{12(t^2 + 1)^{3/2}}. \quad (6.05)$$

При фиксированном u и большом t имеем

$$\hat{\xi}(t) = \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{2} \ln(2t) + \frac{1}{t} + O(t^{-2}), \quad F(t) = -\frac{1}{12} + O(t^{-2}), \\ \varepsilon(u, t) = O(t^{-2}).$$

Следовательно,

$$w(u, t) = 2^{-u/2} e^{-u/4} t^{-(u+1)/2} e^{-u t^3/2} \{1 + O(t^{-2})\}.$$

Так как при тех же условиях решение $U(u/2, \sqrt{2ut})$ — подчиненное, оно только множителем отличается от $w(u, t)$. Фактическое значение этого множителя легко найти из сравнения с формулой (6.02); таким образом, мы получим искомый результат, имеющий вид

$$U(u/2, \sqrt{2ut}) = 2^{(u-1)/4} e^{u/4} u^{-(u+1)/4} (t^2 + 1)^{-1/4} \exp\{-u\hat{\xi}(t)\} \{1 + \varepsilon(u, t)\}. \quad (6.06)$$

6.3. Соотношения (6.04) и (6.06) выполняются при положительных u и всех действительных t или, если вернуться к первоначальным переменным, при положительных a и всех действительных x . При фиксированных u (не обязательно больших) и больших положительных t имеем $\varepsilon(u, t) = O(t^{-2})$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{V}_{-\infty, \infty}(F) < \infty$, мы получаем $\varepsilon(u, t) = O(u^{-1})$ для больших u равномерно относительно t . Эти результаты иллюстрируют двойную асимптотическую природу ЛГ-приближения.

Равномерная оценка остаточного члена может быть получена следующим образом. Из (6.05) мы находим, что стационарные точки функции $F(t)$ имеют вид $t = \pm \sqrt{2/3}$. Далее,

$$F(-\infty) = 1/12, \quad F(-\sqrt{2/3}) = (1/3)\sqrt{2/5},$$

$$F(\sqrt{2/3}) = -(1/3)\sqrt{2/5}, \quad F(\infty) = -1/12.$$

Следовательно, $\mathcal{V}_{-\infty, \infty}(F) = (4/3)\sqrt{2/5} - 1/6 = 0,67\dots$, откуда

$$|\varepsilon(u, t)| \leq \exp\{(0,33\dots)/u\} - 1.$$

В частности, если пренебречь остаточным членом $\varepsilon(u, t)$, то ЛГ-приближение для $U(u/2, \sqrt{2u}t)$ будет верным с точностью до 10%, если $u > 3,6$, т. е. если $a > 1,8$. Это нижнее значение «большого» параметра характеризует эффективность приближения. Такая ситуация отнюдь не является нетипичной.

УПРАЖНЕНИЕ

6.1. Проверить с помощью дифференцирования под знаком интеграла, что интеграл

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-xt - \frac{1}{2}t^2\right) t^{a-(1/2)} dt \quad \left(a > -\frac{1}{2}\right)$$

удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $\exp(x^2/4)U(a, x)$. Рассматривая асимптотическую форму интеграла при больших x , вывести, что

$$U(a, x) = \frac{\exp(-x^2/4)}{\Gamma(a+1/2)} \int_0^{\infty} \exp\left(-xt - \frac{1}{2}t^2\right) t^{a-(1/2)} dt \quad \left(a > -\frac{1}{2}\right).$$

§ 7. Одно специальное обобщение

7.1. Пусть функция $g(x)$ имеет простой полюс при $x=0$, u снова обозначает большой положительный параметр, а w удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{-u^2 + g(x)\} w. \quad (7.01)$$

При $f(x) = u^2$ функция контроля ошибки для этого уравнения имеет вид $-u^{-1} \int g dx$ и обращается в бесконечность при $x = 0$. Поэтому теорема 2.2 не дает никакой информации в окрестности этой точки. Этого можно было ожидать: результаты главы 5, § 5 показывают, что общее решение уравнения (7.01) имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$. Следовательно, его нельзя представить в том виде, в каком представляется общее решение уравнения

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -u^2 w. \quad (7.02)$$

Однако решение уравнения (7.01), подчиненное в начале координат, не имеет особых точек и может быть равномерно аппроксимировано при больших u решением уравнения (7.02), обращаемым в нуль при $x = 0$. Поскольку эта задача находит применение в теории рассеяния и представляет интерес сама по себе, мы приводим ниже некоторые детали.

7.2. Так как мы дадим явное выражение для оценок остаточного члена, то можно считать, что в формулировке главной теоремы $g(x)$ зависит от u ; таким образом

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \{-u^2 + g(u, x)\} w. \quad (7.03)$$

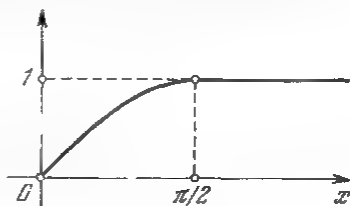


Рис. 7.1. $\text{sm}(x)$.

Предположим, что x изменяется в конечном или бесконечном интервале $(0, b)$, и не будем требовать, чтобы особая точка $x = 0$ функции $g(u, x)$ была простым полюсом. Введем, кроме того, мажоранту

$$\text{sm}(x) = \max_{0 \leq t \leq x} |\sin t|. \quad (7.04)$$

Очевидно, что $\text{sm}(x)$ — неубывающая функция (рис. 7.1).

Теорема 7.1. Предположим, что $g(u, x)$ — непрерывная действительная или комплексная функция x в $(0, b)$ и интеграл

$$G(u, x) \equiv \frac{1}{u} \int_0^x \text{sm}(ut) |g(u, t)| dt \quad (7.05)$$

сходится на нижнем пределе¹⁾. Тогда уравнение (7.03) имеет решение $w(u, x)$, непрерывно дифференцируемое в $[0, b)$,

¹⁾ Т. е. существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \text{sm}(ut) |g(u, t)| dt$. — Прим. перев.

дважды непрерывно дифференцируемое в $[0, b)$ и имеющее вид

$$w(u, x) = \sin(ux) + \varepsilon(u, x), \quad (7.06)$$

где

$$|\varepsilon(u, x)| \leq \operatorname{sm}(ux) [\exp\{G(u, x)\} - 1]. \quad (7.07)$$

Доказательство этого результата сводится к уточнению доказательства теорем 2.1 и 2.2. Интегральное уравнение для $\varepsilon(u, x)$ имеет вид

$$\varepsilon(u, x) = \frac{1}{u} \int_0^x \sin\{u(x-t)\} g(u, t) \{\sin(ut) + \varepsilon(u, t)\} dt.$$

Решение методом последовательных приближений и использование оценки $|\sin\{u(x-t)\}| \leq 1$ приводит к результату, эквивалентному теореме 2.2. Искомое неравенство (7.07) получается, если вместо этой оценки использовать более точную оценку

$$|\sin\{u(x-t)\}| \leq \operatorname{sm}(ux) \quad (0 \leq t \leq x).$$

Детали предоставляются читателю.

7.3. В задачах рассеяния функция $g(u, x) \equiv g(x)$ не зависит от u , $b = \infty$, а $g(x)$ — функция, абсолютно интегрируемая на ∞ . Результаты § 3.5 (при $a_2 = \infty$) показывают, что $w(u, x)$ можно записать в виде

$$w(u, x) = (1 + \rho) \sin(ux + \delta) + o(1) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (7.08)$$

где ρ и δ , не зависят от x , $1 + \rho > 0$ и $-\pi < \delta \leq \pi$. При этом u^2 имеет смысл энергии рассеиваемой частицы, $g(x)$ — потенциал, а δ — сдвиг фазы¹⁾.

Оценки для ρ и δ можно вывести из равномерной оценки $\varepsilon(u, x)$ следующим образом. Объединение результатов (7.06) и (7.08) дает

$$\begin{aligned} \varepsilon(u, x) + o(1) &= (1 + \rho) \sin(ux + \delta) - \sin(ux) = \\ &= \sigma \sin(ux + \eta), \end{aligned} \quad (7.09)$$

где σ и η связаны с ρ и δ соотношениями

$$(1 + \rho) \cos \delta - 1 = \sigma \cos \eta, \quad (1 + \rho) \sin \delta = \sigma \sin \eta, \quad (7.10)$$

и величина σ неотрицательна. Полагая $x \rightarrow \infty$ по последовательности значений, для которых $ux + \eta$ является нечетным целым кратным числа $\pi/2$, и используя то, что $\operatorname{sm}(ux) = 1$ при $ux \geq \pi/2$, мы получаем неравенство

$$\sigma \leq e^{G(u, \infty)} - 1. \quad (7.11)$$

¹⁾ Калоджеро (1972, глава 2).

Чтобы выразить ρ и δ через σ , мы находим из (7.10), что

$$(1 + \rho)e^{i\delta} = 1 + \sigma e^{i\eta}.$$

Если $\sigma \leq 1$, то в силу элементарной геометрии и неравенства Жордана

$$|\rho| \leq \sigma, \quad |\delta| \leq \arcsin \sigma \leq \pi\sigma/2.$$

Подстановка (7.11) приводит к искомой оценке

$$|\rho|, 2|\delta|/\pi \leq e^{G(u, \infty)} - 1 \quad (7.12)$$

при условии, что правая часть не превосходит единицы.

7.4. Асимптотическая форма $\varepsilon(u, x)$, ρ и δ при больших u зависит от поведения $g(x)$ при $x = 0$. В этом можно убедиться, разбивая область интегрирования в выражении для $G(u, \infty)$ точками $\pi/(2u)$ и k , где k — постоянная, превосходящая $\pi/(2u)$.

Например, в случае, упомянутом в § 7.1, функция $g(x)$ имела простой полюс в точке $x = 0$. Если обозначить через K максимальное значение функции $|\operatorname{tg}(t)|$ в $[0, k]$, то

$$G(u, \infty) \leq \frac{K}{u} \int_0^{\pi/(2u)} \frac{\sin(ut)}{t} dt + \frac{K}{u} \int_{\pi/(2u)}^k \frac{dt}{t} + \frac{1}{u} \int_k^\infty |g(t)| dt = O\left(\frac{\ln u}{u}\right).$$

Поскольку $G(u, x) \leq G(u, \infty)$, из оценки (7.07) получаем, что

$$\varepsilon(u, x) = \operatorname{sm}(ux) O(u^{-1} \ln u) \quad (u \rightarrow \infty)$$

равномерно относительно $x \in [0, \infty)$. Кроме того, из оценок (7.12) видно, что ρ и δ имеют порядок $O(u^{-1} \ln u)$. Точные оценки даются ниже в упр. 7.2 и 7.3.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Пусть функция $g(u, x) \equiv g(x)$ абсолютно интегрируема в точке b и $g(x) = O(x^{-1-\beta})$ при $x \rightarrow +0$, где $\beta \in (0, 1)$. Показать, что в теореме 7.1 $\varepsilon(u, x)$ ведет себя как $\operatorname{sm}(ux) O(u^{\beta-1})$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно в $[0, b)$.

7.2. Пусть функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на ∞ и имеет в точке $x = 0$ простой полюс с вычетом, равным r . Показать, что

$$uG(u, \infty) = |r| \ln u + c + u^{-1}I(u),$$

где

$$c = |r| \left\{ \ln(2k/\pi) + \operatorname{Si}(\pi/2) \right\} + \int_0^k \left\{ |g(t)| - t^{-1}|r| \right\} dt + \int_k^\infty |g(t)| dt,$$

k — любое постоянное число и

$$|I(u)| \leq (1 + \pi/2) \max_{0 \leq t \leq \pi/(2u)} \left| |g(t)| - t^{-1}|r| \right|.$$

Показать также, что c не зависит от k .

7.3 Пусть $g(x)$ совпадает с потенциалом Юкавы me^{-mx}/x , в котором μ и m — постоянные, причем число m положительно. С помощью предыдущего упражнения и результатов главы 2, § 3.1 показать, что каждое решение уравнения (7.01), обращающееся в нуль в начале координат, можно представить в виде (7.08), где

$$|\delta| \leq \frac{\pi}{2} \exp \left(\frac{|\mu|}{u} \left[\ln \left(\frac{2u}{\pi m} \right) + \text{Si} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \gamma + \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \frac{m}{u} \right] \right) - \frac{\pi}{2}$$

(γ — постоянная Эйлера), при условии, что эта оценка не превосходит $\pi/2$.

§ 8*. Нули

8.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \{f(x) - g(x)\} w = 0, \quad (8.01)$$

в котором $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теорем 2.1 и 2.2. Предположим также, что функция $g(x)$ действительна и

$$\xi(x) \equiv \int f^{1/2}(x) dx \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow a_2 - 0).$$

Как было отмечено в упр. 2.5, общее решение можно записать в виде

$$w(x) = A f^{-1/4}(x) [\sin \{\xi(x) + \delta\} + \varepsilon(x)], \quad (8.02)$$

где A и δ — постоянные, значениями которых определяются частные решения, и

$$|\varepsilon(x)| \leq \exp \{Y_{x, a_2}(F)\} - 1 \quad (a_1 < x < a_2).$$

Условие $w(x) = 0$ дает

$$\xi(x) = n\pi - \delta + (-1)^{n-1} \arcsin \{\varepsilon(x)\},$$

где n — произвольное целое число. При $x \rightarrow a_2 - 0$ имеем $\varepsilon(x) = o(1)$. Следовательно,

$$\xi(x) = n\pi - \delta + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому в окрестности точки a_2 нули $w(x)$ даются формулой

$$x = X\{n\pi - \delta + o(1)\} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (8.03)$$

где $X(\xi)$ — функция, обратная $\xi(x)$. Если использовать теорему о среднем значении, то этот результат можно сформулировать как

$$x = X(n\pi - \delta) + o(1) X'\{n\pi - \delta + o(1)\} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (8.04)$$

Аналогичным образом, если дифференциальное уравнение содержит большой положительный параметр u и имеет вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \{u^2 f(x) - g(x)\} w = 0,$$

причем $\mathcal{Y}_{a_1, a_2}(F) < \infty$, то нули $w(u, x)$ в (a_1, a_2) имеют вид

$$x = X \left\{ \frac{n\pi - \delta(u)}{u} \right\} + O \left(\frac{1}{u^2} \right) X' \left\{ \frac{n\pi - \delta(u)}{u} + O \left(\frac{1}{u^2} \right) \right\} \quad (u \rightarrow \infty). \quad (8.05)$$

равномерно относительно n . Здесь $\delta(u)$ зависит от граничных условий, которым удовлетворяет $w(u, x)$, а n — любое целое число, такое, что значение $u^{-1} \{n\pi - \delta(u)\} + O(u^{-2})$ лежит в интервале изменения ξ , соответствующем интервалу (a_1, a_2) .

8.2. Дальнейшее уточнение формул (8.04) и (8.05) зависит от свойств $X(\xi)$. Предположим, например, что $a_2 = \infty$ и что $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям (4.06). Тогда

$$\xi(x) \sim c^{1/\alpha} x^\alpha / \alpha \quad (x \rightarrow \infty), \quad X(\xi) \sim (\alpha c^{-1/\alpha} \xi)^{1/\alpha} \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

и

$$X'(\xi) = \frac{1}{f^{1/2}(x)} \sim \frac{x^{1-\alpha}}{c^{1/2}} \sim \frac{(\alpha \xi)^{(1-\alpha)/\alpha}}{c^{1/(2\alpha)}}, \quad \frac{X'(\xi)}{X(\xi)} \sim \frac{1}{\alpha \xi}.$$

Поэтому $X'\{n\pi - \delta + o(1)\} \sim X'(n\pi - \delta)$ при $n \rightarrow \infty$, и подстановка этого соотношения в (8.04) дает¹⁾

$$x = X(n\pi - \delta) \{1 + o(n^{-1})\} \quad (n \rightarrow \infty).$$

8.3. Оценка остаточного члена для асимптотического приближения (8.03) может быть построена следующим способом. Пусть b — наименьшее число из замыкания (a_1, a_2) , такое, что

$$\mathcal{Y}_{x, a_2}(F) < \ln 2 \quad (b < x < a_2);$$

положим

$$\sigma(x) = \exp \{ \mathcal{Y}_{x, a_2}(F) \} - 1, \quad \theta(x) = \arcsin \{ \varepsilon(x) \}.$$

Тогда в (b, a_2) имеем $|\varepsilon(x)| \leq \sigma(x) < 1$ и $|\theta(x)| < \pi/2$. Уравнение для нулей функции (8.02) принимает вид

$$\omega(x) \equiv \xi(x) - n\pi + \delta + (-1)^n \theta(x) = 0. \quad (8.06)$$

Если n — такое достаточно большое число, что

$$X(n\pi - \delta - \pi/2) > b, \quad (8.07)$$

то

$$\omega \{ X(n\pi - \delta - \pi/2) \} = -(\pi/2) + (-1)^n \theta \{ X(n\pi - \delta - \pi/2) \} < 0$$

и

$$\omega \{ X(n\pi - \delta + \pi/2) \} = (\pi/2) + (-1)^n \theta \{ X(n\pi - \delta + \pi/2) \} > 0.$$

Поэтому в интервале

$$X(n\pi - \delta - \pi/2) < x < X(n\pi - \delta + \pi/2)$$

содержится по крайней мере один нуль.

¹⁾ Дальнейшим упрощением может служить формула $x = (\alpha c^{-1/\alpha} n\pi)^{1/\alpha} \times \{1 + o(1)\}$, но она является слишком грубой, поскольку не отделяет нулей.

Чтобы найти более узкий интервал, в котором содержится этот нуль, обозначим его через

$$x = X(n\pi - \delta + \eta). \quad (8.08)$$

Тогда η численно меньше, чем $\pi/2$, и удовлетворяет равенству

$$\eta = (-1)^{n-1} \theta \{X(n\pi - \delta + \eta)\}.$$

В силу неравенства Жордана $|\theta(x)| \leq (\pi/2) |e(x)| \leq (\pi/2) \sigma(x)$. Поэтому

$$|\eta| \leq \frac{\pi}{2} \exp \left\{ \mathcal{Y}_X \left(n\pi - \delta - \frac{\pi}{2} \right)_{a_1} (F) \right\} - \frac{\pi}{2}. \quad (8.09)$$

Таким образом, если n удовлетворяет неравенству (8.07), то функция (8.02) имеет нуль вида (8.08), где η оценивается согласно формуле (8.09).

8.4. Проведенный анализ не исключает возможности того, что соотношению (7.09) удовлетворяет более чем один нуль. Чтобы разобраться в этом вопросе, мы исследуем знак $\omega'(x)$. Из (8.06) получаем

$$\omega'(x) = \xi'(x) + (-1)^n \theta'(x) = f^{1/2}(x) \{1 + (-1)^n \theta'(x) f^{-1/2}\}.$$

Далее, $\theta'(x) = e'(x) \{1 + e^2(x)\}^{-1/2}$, и из теоремы 2.2 вытекает неравенство $|e'(x)| \leq f^{1/2}(x) \sigma(x)$. Если $x > b$, то $\sigma(x) < 1$, и поэтому

$$|\theta'(x)| f^{-1/2}(x) \leq \sigma(x) \{1 - \sigma^2(x)\}^{-1/2}.$$

Выражение $\sigma(1 - \sigma^2)^{-1/2}$ как функция σ возрастает монотонно от нуля при $\sigma = 0$ до единицы при $\sigma = 2^{-1/2}$. Пусть \hat{b} — наименьшее число из замыкания (b, a_2) , для которого

$$\mathcal{Y}_{x, a_2}(F) < \ln(1 + 2^{-1/2}) \quad (\hat{b} < x < a_2).$$

Тогда $\omega'(x) > 0$ в интервале (\hat{b}, a_2) . Таким образом, если n настолько велико, что

$$X(n\pi - \delta - \pi/2) > \hat{b},$$

то условию (8.09) удовлетворяет точно один нуль (8.08).

8.5. Аналогичные рассуждения дают следующий результат для приближения (8.05). Пусть

$$u < \mathcal{Y}_{a_1, a_2}(F) / \ln(1 + 2^{-1/2}),$$

и n таково, что $X\{(u^{-1}(n\pi - \delta - \pi/2))\} \in (a_1, a_2)$. Тогда $w(u, x)$ имеет точно один нуль вида $X\{u^{-1}(n\pi - \delta + \eta)\}$, где

$$|\eta| \leq \frac{\pi}{2} \exp \left[u^{-1} \mathcal{Y}_X \left\{ u^{-1} \left(n\pi - \delta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}_{a_2} (F) \right] - \frac{\pi}{2}. \quad (8.10)$$

Следует отметить, что оценка (8.10) стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$ или при $n \rightarrow \infty$, что снова отражает двойную асимптотическую природу ЛГ-приближения.

8.6. Оценки (8.09) и (8.10) относятся к переменной ξ . Ошибка в соответствующем значении x может быть оценена на основе специальных свойств функции $X(\xi)$ или с использованием результата следующего вида, доказательство которого предоставляется читателю в качестве упражнения.

Лемма 8.1. *Предположим, что в конечном или бесконечном интервале (ξ_1, ξ_2) изменения ξ функция $X(\xi)$ положительна, $X'(\xi)$ — непрерывна и $|X'(\xi)/X(\xi)| \leq K$. Тогда для любых чисел ξ и δ , таких, что ξ и $\xi + \delta$ лежат в (ξ_1, ξ_2) и $|\delta| < 1/K$, справедливо неравенство*

$$(1 - K|\delta|)X(\xi) \leq X(\xi + \delta) \leq X(\xi)/(1 - K|\delta|).$$

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Вывести из (8.04), что если a_2 — конечная точка, а функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям (4.01), то нули $w(x)$ в окрестности a_2 описываются формулой

$$a_2 - x = \{a_2 - X(n\pi - \delta)\} \{1 + o(n^{-1})\} \quad (n \rightarrow \infty).$$

8.2. Пусть m — фиксированное положительное число. Выбрав $\left(\frac{1}{2} \frac{x}{m}\right)^{2m}$ в качестве новой независимой переменной в уравнении Бесселя $x^2 w'' + x w' + (x^2 - m^2)w = 0$, показать, что нули каждого решения имеют вид $x = n\pi - \delta + o(1)$, где n — большое положительное целое число, а δ — произвольная постоянная.

Показать также, что если $n\pi > \delta + \frac{\pi}{2} + \frac{m^2 - 1/4}{\ln(1 + 2^{-1/2})}$, то существует точно один нуль, для которого

$$|x - n\pi + \delta| \leq \frac{\pi}{2} \exp \left\{ \frac{\left| m^2 - \frac{1}{4} \right|}{n\pi - \delta - \frac{\pi}{2}} \right\} - \frac{\pi}{2}.$$

8.3. Используя (8.05), показать, что при положительных значениях параметра u уравнение

$$w'' + u^2(x^2 + 1)w = 0$$

имеет решение, действительные нули которого представляются в виде $T\{(n\pi - \delta)/u\} + \eta(u, n)$, где δ — произвольная постоянная, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $T(\xi)$ — функция, обратная $\xi(t)$ из формулы (6.03), и $\eta(u, n) = u^{-3/2}(u + |n|)^{-1/2}O(1)$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно относительно неограниченных значений n .

В случае положительных нулей использовать (8.10) для доказательства более сильного результата

$$\eta(u, n) = u^{-1/2}(u + n)^{-3/2}O(1).$$

8.4. Пользуясь обозначениями § 8.3, показать, что в нуле функции $w(x)$ справедлива формула

$$w'(x) = (-1)^n A^{1/4}(x) (1 + \tau),$$

где $-\rho - \rho^2 \leq \tau \leq \rho$, а через $n\pi/2$ обозначена правая часть (8.09).

§ 9*. Задачи на собственные значения

9.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \{u^2 f(x) - g(x)\} w = 0, \quad (9.01)$$

в конечном интервале $a_1 \leq x \leq a_2$, в котором $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теорем 2.1 и 2.2; пусть, кроме того, функция $g(x)$ действительна, функции $f''(x)$ и $g(x)$ в концевых точках непрерывны, причем $f(x)$ не обращается в нуль. Существует ли решение $w(u, x)$, удовлетворяющее граничным условиям $w(u, a_1) = w(u, a_2) = 0$ и не равное тождественно нулю? Ответ будет утвердительным только для некоторых частных значений положительного параметра u , называемых *собственными значениями*. Соответствующие решения называются *собственными решениями*¹⁾; они произвольны с точностью до множителя, не зависящего от x . Асимптотические приближения для больших собственных значений можно найти следующим образом.

Из теоремы 2.2 следует, что общее решение уравнения (9.01) можно записать в виде

$$w(u, x) = A(u) f^{-1/4}(x) \left[\sin \left\{ u \int_{a_1}^x f^{1/2}(t) dt + \delta(u) \right\} + \varepsilon(u, x) \right], \quad (9.02)$$

где величины $A(u)$ и $\delta(u)$ не зависят от x и

$$|\varepsilon(u, x)| \leq \exp \{u^{-1} \mathcal{Y}_{a_1, x}(F)\} - 1, \quad (9.03)$$

причем $F(x)$ снова определяется формулой (2.01). Вариация $\mathcal{Y}_{a_1, a_2}(F)$, по предположению, конечна; поэтому $\varepsilon(u, x)$ имеет порядок $O(u^{-1})$ при больших u равномерно относительно x .

При $x = a_1$ имеем $\varepsilon(u, x) = 0$. Следовательно, $\sin \{\delta(u)\} = 0$. Без потери общности можно положить $\delta(u) = 0$, поскольку все другие значения, кратные π , приводят лишь к умножению $w(u, x)$ на ± 1 . Из второго граничного условия вытекает равенство

$$\sin(uc) + \varepsilon(u, a_2) = 0, \quad c \equiv \int_{a_1}^{a_2} f^{1/2}(t) dt. \quad (9.04)$$

Так как $\varepsilon(u, a_2) = O(u^{-1})$, то, как и в главе 1, § 5, мы получаем

$$u = n\pi c^{-1} + O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9.05)$$

где n — положительное целое число. Это и есть искомое приближение для собственных значений.

¹⁾ Или собственными функциями.— *Прим. ред.*

9.2. Чтобы получить оценки для члена с символом порядка O в (9.05), мы введем обозначения

$$d = \mathcal{V}_{a_1, a_2}(F), \quad \theta(u) = \arcsin \{\varepsilon(u, a_2)\}. \quad (9.06)$$

Из (9.03) имеем

$$|\varepsilon(u, a_2)| \leq e^{d/u} - 1. \quad (9.07)$$

Следовательно, если $u > d/\ln 2$, то $|\varepsilon(u, a_2)| < 1$ и тогда в силу неравенства Жордана

$$|\theta(u)| \leq (\pi/2)(e^{d/u} - 1). \quad (9.08)$$

Уравнение для собственных значений имеет вид

$$\omega(u) \equiv uc - n\pi + (-1)^n \theta(u) = 0. \quad (9.09)$$

Пусть n настолько велико, что число $(n - 1/2)\pi c^{-1}$ превосходит $d/\ln 2$. Тогда

$$\omega\{(n - 1/2)\pi c^{-1}\} = -(\pi/2) + (-1)^n \theta\{(n - 1/2)\pi c^{-1}\} < 0,$$

в то время как

$$\omega\{(n + 1/2)\pi c^{-1}\} = (\pi/2) + (-1)^n \theta\{(n + 1/2)\pi c^{-1}\} > 0.$$

В силу теоремы 2.1 главы 5 $\theta(u)$ — непрерывная функция u . Поэтому по крайней мере одно собственное значение удовлетворяет неравенству $(n - 1/2)\pi c^{-1} < u < (n + 1/2)\pi c^{-1}$. Чтобы найти более точные границы интервала, которому принадлежит это собственное значение, положим

$$u = (u + v)\pi c^{-1}, \quad (9.10)$$

где $|v| < 1/2$. Тогда из (9.09) имеем

$$v\pi = (-1)^n \theta\{(n + v)\pi c^{-1}\}.$$

Следовательно, из (9.08) мы получаем

$$|v| \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{cd}{(n - 1/2)\pi} \right\} - \frac{1}{2}. \quad (9.11)$$

Соотношения (9.10) и (9.11) содержат искомую формулировку условий для собственных значений. Они справедливы, если $n > (1/2) + cd/(\pi \ln 2)$. Соответствующее собственное решение имеет вид

$$f^{-1/4}(x) \left[\sin \left\{ \frac{(n + v)\pi}{c} \int_{a_1}^x f^{1/2}(t) dt \right\} + \varepsilon_n(x) \right],$$

где

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \exp \left\{ \frac{\mathcal{Y}_{a_1, x}^{(F)}}{(n-1/2)\pi} \right\} - 1.$$

Собственное решение можно записать и в другом виде, заменив в обоих выражениях a_1 на a_2 .

9.3. Чтобы выяснить возможность наличия более чем одного собственного значения вида (9.10), для которого $|\nu| < 1/2$, мы используем знак производной $\omega'(u)$ (ср. § 8.4). При сформулированных выше условиях из теоремы 2.2 следует, что для любой точки a из $[a_1, a_2]$ уравнение (9.01) имеет решения

$$\begin{aligned} w_j(u, x) = \\ = f^{-1/4}(x) \exp \left\{ (-1)^{j-1} i u \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_j(u, x)\} \quad (j = 1/2), \end{aligned}$$

такие, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon_j(u, x)| &\leq \exp \left\{ \frac{\mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}}{u} \right\} - 1, \\ \frac{1}{u f^{1/2}(x)} \left| \frac{\partial \varepsilon_j(u, x)}{\partial x} \right| &\leq \exp \left\{ \frac{\mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}}{u} \right\} - 1. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Теперь нам требуется информация относительно производных остаточного члена по u .

Теорема 9.1. При условиях § 9.1 функции $\varepsilon_j(u, x)$, $\partial \varepsilon_j / \partial x$ и $\partial \varepsilon_j / \partial u$ непрерывны по u и x при $u > 0$ и $x \in [a_1, a_2]$, причем

$$\left| \frac{\partial \varepsilon_j(u, x)}{\partial u} \right| \leq \left[\frac{\mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}}{u} + \frac{\{1 + \mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}\} \mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}}{u^2} \right] \exp \left\{ \frac{\mathcal{Y}_{a, x}^{(F)}}{u} \right\}. \quad (9.13)$$

Здесь функция $F(x)$ определяется формулой (2.01) и

$$I(x) = \int f^{1/2}(x) \mathcal{Y}_{a, x}^{(F)} dx. \quad (9.14)$$

Этот результат можно доказать прямым продолжением доказательствам теорем 2.1 и 2.2. Детали оставляются читателю в качестве упражнения.

Чтобы применить теорему 9.1 в настоящей задаче, положим $a = a_1$. Тогда остаточный член, о котором шла речь в §§ 9.1 и 9.2, связан с остаточными членами, указанными в теореме, следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i\varepsilon(u, r) = \exp \left\{ i u \int_{a_1}^x f^{1/2}(t) dt \right\} \varepsilon_1(u, x) - \\ - \exp \left\{ - i u \int_{a_1}^x f^{1/2}(t) dt \right\} \varepsilon_2(u, x). \end{aligned}$$

Используя (9.12) и (9.13), мы получаем

$$\left| \frac{\partial \varepsilon(u, a_2)}{\partial u} \right| \leq \left\{ \frac{d_1}{u} + \frac{(1+d_1)d}{u^2} \right\} e^{d/u} + c(e^{d/u} - 1),$$

где c и d определены формулами (9.04) и (9.06) и

$$d_1 = \int_{a_1}^{a_2} f^{1/2}(t) \mathcal{Y}_{a_1, t}(F) dt.$$

Дифференцирование равенства (9.09) и второго соотношения в (9.06) дает

$$\begin{aligned} \omega'(u) &= c + (-1)^n \theta'(u), \\ \theta'(u) &= \{1 - \varepsilon^2(u, a_2)\}^{-n} \{\partial \varepsilon(u, a_2) / \partial u\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Если $u > d/\ln 2$, то $e^{d/u} < 2$ и

$$|\theta'(u)| \leq \frac{1}{(2e^{-d/u} - 1)^{1/2}} \left\{ \frac{d_1}{u} + \frac{(1+d_1)d}{u^2} + c(1 - e^{-d/u}) \right\} \equiv \rho(u). \quad (9.16)$$

Функция $\rho(u)$ строго убывает от бесконечности при $u = d/\ln 2$ до нуля при $u = \infty$. Пусть $u = u_0$ — корень уравнения $\rho(u) = c$ в этой области. Тогда из первого соотношения (9.15) следует, что $\omega'(u) > 0$ при $u > u_0$. Поэтому существует *точно* одно собственное значение вида (9.10), для которого $|v| < 1/2$ при условии, что $n > (1/2) + \pi^{-1} c u_0$.

В силу симметрии можно заменить d_1 на

$$d_2 = \int_{a_1}^{a_2} f^{1/2}(t) \mathcal{Y}_{a_2, t}(F) dt$$

в выражении для $\rho(u)$. При этом в случае $d_2 < d_1$ получается более сильная оценка для $\theta'(u)$.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Пусть b — любое число, удовлетворяющее условию $1 < b < 1 + 2^{-1/2}$. Показать, в обозначениях § 9.3, что $\rho(u) < c$, когда u превосходит каждое из чисел

$$\frac{d}{\ln b}, \quad \frac{d_2 + (1+d_2) \ln b}{c(2b^{-1} - 1)^{1/2} - c(1 - b^{-1})}.$$

9.2. Полагая $b = 3/2$ в предыдущем упражнении, показать, что если n — любое целое число, превосходящее единицу, то между числами $\frac{3n\pi}{7} \pm \frac{3\pi}{14} \left[\exp \left\{ \frac{49}{36n - 18\pi} \right\} - 1 \right]$ лежит *точно* одно собственное значение u дифференциального уравнения

$$w'' + u^2 x^4 w = 0, \quad w(1) = w(2) = 0.$$

9.3. Пусть k — постоянная из интервала $[0, 1/3]$ и $\eta = 3k\pi/\{2(1-k)\}$. Показать, что для каждого целого числа n , превосходящего $(\eta/\ln 2) + 1/2$, существует по крайней мере одно такое число v , что

$$|v| \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{\eta}{n - 1/2} \right\} - \frac{1}{2},$$

и дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left\{ (n + v)^2 - \frac{3k(k - 3k \cos^2 \theta - 2 \cos \theta)}{4(1 + k \cos \theta)^2} \right\} w = 0$$

имеет нетривиальное периодическое решение, являющееся нечетной функцией θ .

§ 10. Теоремы о сингулярных интегральных уравнениях

10.1. Доказательства теорем 2.1 и 2.2 могут быть перенесены на другие типы линейных дифференциальных уравнений. Для уравнений второго порядка это делается в следующей последовательности.

(a) Построение интегрального уравнения (Вольтерра) для остаточного члена методом вариации параметров.

(b) Построение равномерно сходящегося ряда — разложения Лиувилля — Неймана для решения $h(\xi)$ уравнения методом последовательных приближений.

(c) Проверка того, что $h(\xi)$ — дважды дифференцируемая функция, с помощью построения аналогичных рядов для $h'(\xi)$ и $h''(\xi)$.

(d) Вывод оценок для $|h(\xi)|$ и $|h'(\xi)|$ с помощью мажорирования разложения Лиувилля — Неймана.

Было бы утомительно проводить каждый из этих шагов в следующей работе. Мы установим далее две важные теоремы, которые исключают необходимость этапов (b), (c) и (d) для большинства задач, с которыми мы будем встречаться.

10.2. Интегральное уравнение будет выбраться в стандартной форме

$$h(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} K(\xi, v) \{ \varphi(v) J(v) + \psi_0(v) h(v) + \psi_1(v) h'(v) \} dv. \quad (10.1)$$

Для уравнения (2.09), например, нужно положить

$$K(\xi, v) = \frac{1}{2} \{ 1 - e^{2(v-\xi)} \}, \quad J(v) = 1,$$

$$\varphi(v) = \psi_0(v) = \psi(v), \quad \psi_1(v) = 0.$$

Мы сделаем следующие предположения.

(1) Интегрирование проводится вдоль данного пути \mathcal{P} , состоящего из конечной цепочки R_2 -дуг в комплексной плоскости.

При этом одна или обе концевые точки α, β могут находиться на бесконечности. (В случае действительных переменных \mathcal{P} совпадает с частью действительной оси.)

(2) Действительные или комплексные функции $J(v)$, $\varphi(v)$, $\psi_0(v)$ и $\psi_1(v)$ непрерывны при $v \in (\alpha, \beta)_{\mathcal{P}}$, исключая, возможно, конечное число разрывов или точек, в которых они обращаются в бесконечность¹⁾.

(3) Действительное или комплексное ядро $K(\xi, v)$ и его первые две частные производные по ξ являются непрерывными функциями обеих переменных, когда $\xi, v \in (\alpha, \beta)_{\mathcal{P}}$, включая точки, в которых соединяются дуги. Здесь, как и всюду далее, *все дифференцирования по ξ выполняются вдоль \mathcal{P}* .

(4) $K(\xi, \xi) = 0$.

(5) Если $\xi \in (\alpha, \beta)_{\mathcal{P}}$ и $v \in (\alpha, \xi]_{\mathcal{P}}$, то

$$|K(\xi, v)| \leq P_0(\xi) Q(v), \quad \left| \frac{\partial K(\xi, v)}{\partial \xi} \right| \leq P_1(\xi) Q(v),$$

$$\left| \frac{\partial^2 K(\xi, v)}{\partial \xi^2} \right| \leq P_2(\xi) Q(v),$$

где $P_j(\xi)$ и $Q(v)$ — непрерывные действительные функции, причем $P_j(\xi)$ положительны.

(6) Если $\xi \in (\alpha, \beta)$, то сходятся интегралы

$$\Phi(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} |\varphi(v) dv|, \quad \Psi_0(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} |\psi_0(v) dv|,$$

$$\Psi_1(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} |\psi_1(v) dv|$$

и являются конечными верхние грани

$$k \equiv \sup \{Q(\xi) |J(\xi)|\}, \quad k_0 \equiv \sup \{P_0(\xi) Q(\xi)\},$$

$$k_1 \equiv \sup \{P_1(\xi) Q(\xi)\},$$

исключая тот случай, когда k_1 не существует при $\psi_1(v) \equiv 0$.

Теорема 10.1. При сформулированных условиях уравнение (10.01) имеет единственное решение $h(\xi)$, которое непрерывно дифференцируемо в $(\alpha, \beta)_{\mathcal{P}}$ и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{h(\xi)}{P_0(\xi)} \rightarrow 0, \quad \frac{h'(\xi)}{P_1(\xi)} \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \alpha \text{ вдоль } \mathcal{P}). \quad (10.02)$$

¹⁾ Как и в главе 4, § 6.1, символ $(\alpha, \beta)_{\mathcal{P}}$ обозначает часть \mathcal{P} , лежащую между α и β .

Кроме того ¹⁾,

$$\frac{|h(\xi)|}{P_0(\xi)}, \frac{|h'(\xi)|}{P_1(\xi)} \leq k\Phi(\xi) \exp\{k_0\Psi_0(\xi) + k_1\Psi_1(\xi)\}, \quad (10.03)$$

и функция $h''(\xi)$ непрерывна, исключая, возможно, точки, в которых разрывны $\varphi(\xi)J(\xi)$, $\Psi_0(\xi)$ и $\Psi_1(\xi)$.

10.3. Теорема 10.1. доказывается, как и предыдущие теоремы. Мы определяем последовательность $\{h_s(\xi)\}$ условиями $h_0(\xi) = 0$,

$$h_1(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} K(\xi, v) \varphi(v) J(v) dv \quad (10.04)$$

и

$$\begin{aligned} h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi) = & \int_{\alpha}^{\xi} K(\xi, v) [\Psi_0(v) \{h_s(v) - h_{s-1}(v)\} + \\ & + \Psi_1(v) \{h'_s - h'_{s-1}(v)\}] dv \quad (s \geq 1). \end{aligned} \quad (10.05)^2$$

Используя условия (5) и (6), мы получаем

$$|h_1(\xi)| \leq P_0(\xi) \int_{\alpha}^{\xi} Q(v) |\varphi(v) J(v) dv| \leq kP_0(\xi) \Phi(\xi).$$

Поэтому, если ξ_1 и ξ_2 — любые фиксированные точки из (α, β) , то интеграл (10.04) сходится равномерно относительно $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Объединение этого результата с условиями (2) и (3) показывает, что функция $h_1(\xi)$ непрерывна в (α, β) ²⁾.

Далее, дифференцируя (10.04)³⁾ и используя условие (4), мы получаем

$$h'_1(\xi) = \int_{\alpha}^{\xi} \frac{\partial K(\xi, v)}{\partial \xi} \varphi(v) J(v) dv.$$

Следовательно, в силу аналогичных аргументов функция $h'_1(\xi)$ непрерывна и допускает оценку

$$|h'_1(\xi)| \leq kP_1(\xi) \Phi(\xi).$$

Отправляясь от этих результатов и используя равенство (10.05) и его производную, мы можем проверить по индукции, что

¹⁾ Слагаемое $k_1\Psi_1(\xi)$ в (10.03) можно опустить, если $\Psi_1(v) \equiv 0$.

²⁾ Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., «Наука», 1970, п. 506.

³⁾ Там же, п. 507.

каждая функция $h_s(\xi)$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{|h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi)|}{P_0(\xi)}, \frac{|h'_{s+1}(\xi) - h'_s(\xi)|}{P_1(\xi)} \leq k\Phi(\xi) \frac{\{k_0\Psi_0(\xi) + k_1\Psi_1(\xi)\}^s}{s!} \quad (s \geq 0). \quad (10.06)$$

Искомое решение имеет вид

$$h(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h_{s+1}(\xi) - h_s(\xi)\}.$$

Непрерывная дифференцируемость этой суммы вытекает из (10.06), так как ряд мажорируется и поэтому сходится равномерно в $[\xi_1, \xi_2]_{\infty}$.

Последняя формула также показывает, что $h(\xi)$ удовлетворяет уравнению (10.01), и дает искомые оценки (10.03).

Соотношения (10.02) получаются непосредственно, поскольку $\Phi(\xi)$, $\Psi_0(\xi)$ и $\Psi_1(\xi)$ стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \alpha$. Сформулированное свойство $h''(\xi)$ проверяется с помощью второго дифференцирования (10.04) и (10.05).

Для завершения доказательства теоремы мы должны показать, что решение $h(\xi)$ единственно. Это можно осуществить способом, аналогичным изложенному в § 1.3 главы 5. Детали оставляются читателю.

10.4. Оценки для $h(\xi)$ и $h'(\xi)$ можно уточнить следующим образом.

Теорема 10.2. *Примем условия § 10.2 и предположим, кроме того, что $\varphi(v) = \psi_0(v)$, $\psi_1(v) = 0$. Тогда решение $h(\xi)$, описываемое теоремой 10.1, удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{|h(\xi)|}{P_0(\xi)}, \frac{|h'(\xi)|}{P_1(\xi)} \leq \frac{k}{k_0} [\exp\{k_0\Phi(\xi)\} - 1]. \quad (10.07)$$

Идея доказательства не отличается от предыдущих, и оно снова предоставляется читателю в качестве упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ

10.1. Показать, как теорема 10.2 может быть применена для доказательства теорем 2.1 и 2.2.

§ 11. Оценки остаточных членов: комплексные переменные

11.1. Мы обратимся теперь к приближенному решению дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \{f(z) + g(z)\}w \quad (11.01)$$

в комплексной области D , в которой функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны, причем $f(z)$ не обращается в нуль. Мы предположим сначала, что D односвязна; этим обеспечивается однозначность решения уравнения (11.01) (глава 5, § 3.1).

Преобразование $\xi = \int f^{1/2}(z) dz$ отображает D на некоторую область Δ . Отображение не имеет особенностей, поскольку $d\xi/dz$ не обращается в нуль, и его можно считать взаимно однозначным, предполагая (если это необходимо), что Δ состоит из нескольких римановых листов. Функция $\psi(\xi)$, определенная формулой (2.06) (где переменная x заменена на z), голоморфна в Δ . Рассуждения § 2.2 справедливы без изменений до неравенства (2.12); таким образом, мы снова получаем

$$h''(\xi) + 2h'(\xi) = \psi(\xi) \{1 + h(\xi)\} \quad (11.02)'$$

и

$$h(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + h(v)\} dv. \quad (11.03)$$

Чтобы оценить ядро в случае, когда обе переменные комплексны, мы предположим, что в интегральном уравнении (11.03) интегрирование ведется вдоль заданного пути Q , состоящего из конечной цепочки R_2 -дуг в комплексной плоскости, и $\operatorname{Re} v$ не убывает, если v удаляется от начальной точки α_1 вдоль Q . Тогда

$$|e^{2(v-\xi)}| \leq 1, \quad |1 - e^{2(v-\xi)}| \leq 2 \text{ при } v \in (\alpha_1, \xi]_Q. \quad (11.04)'$$

Применяя результаты § 10 при $\alpha = \alpha_1$, $K(\xi, v) = \frac{1}{2} \{1 - e^{2(v-\xi)}\}$, $\partial K / \partial \xi = e^{2(v-\xi)}$, $P_0'(\xi) = P_1(\xi) = Q(v) = 1$, $J(v) = 1$, $\psi(v) = \psi_0(v) = \psi(v)$ и $\psi_1(v) = 0$, мы выводим из теорем 10.1 и 10.2, что уравнение (11.03) имеет решение, которое непрерывно дифференцируемо вдоль Q и удовлетворяет оценкам

$$|h(\xi)|, |h'(\xi)| \leq e^{\Psi(\xi)} - 1,$$

где интеграл

$$\Psi(\xi) = \int_{\alpha_1}^{\xi} |\psi(v) dv|$$

вычисляется вдоль Q .

11.2. Чтобы завершить рассмотрение, мы должны показать, что $h(\xi)$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению (11.02) в комплексной плоскости. Прямой подход затруднителен, поскольку множество допустимых точек ξ не обязательно содержит область¹⁾. Вместо этого мы поступим следующим образом.

¹⁾ Ср. упр. 11.2, приведенное ниже.

Предположим сначала, что α_1 — данная конечная точка Δ . Из теоремы 3.1 главы 5 мы знаем, что при заданных начальных условиях каждое голоморфное решение $W(\xi)$ уравнения (2.05) единственно. С учетом (2.07) это означает, что в Δ имеется единственная голоморфная функция $\hat{h}(\xi)$, удовлетворяющая уравнению (11.02) и условиям $\hat{h}(\alpha_1) = \hat{h}'(\alpha_1) = 0$. Варпация параметров показывает, что $\hat{h}(\xi)$ также удовлетворяет уравнению (11.03), а поскольку в силу теоремы 10.1 решение (11.03) единственно, то отсюда вытекает равенство $\hat{h}(\xi) = h(\xi)$ вдоль Q .

Пусть теперь α_1 — бесконечно удаленная точка, лежащая на некоторой R_2 -дуге \mathcal{M}_1 . Если $\hat{h}(\xi)$ — решение уравнения (11.02), удовлетворяющее равенствам $\hat{h}(\gamma) = h(\gamma)$ и $\hat{h}'(\gamma) = h'(\gamma)$, где γ — произвольно выбранная конечная точка пути \hat{Q} , то $\hat{h}(\xi) = h(\xi)$ всюду на Q . Для доказательства сначала выведем из (11.02), используя вариацию параметров и условия в точке $\xi = \gamma$, что

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) = & \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + \hat{h}(v)\} dv + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\gamma} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{1 + h(v)\} dv. \end{aligned}$$

Вычитание уравнения (11.03) из этого выражения дает

$$\hat{h}(\xi) - h(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\xi} \{1 - e^{2(v-\xi)}\} \psi(v) \{\hat{h}(v) - h(v)\} dv.$$

Рассматривая это соотношение как интегральное уравнение для $\hat{h}(\xi) - h(\xi)$ и применяя теорему 10.1, где γ играет роль α , мы получаем, что $\hat{h}(\xi) = h(\xi)^1$. Чтобы гарантировать, что $\hat{h}(\xi)$ — одно и то же решение уравнения (10.02) для всех путей Q , мы наложим условие, чтобы эти пути совпадали с \mathcal{M}_1 в окрестности α_1 .

11.3. Собирая вместе полученные результаты и аналогичные результаты для второго решения дифференциального уравнения и возвращаясь к первоначальной переменной z , мы приходим к следующей теореме.

¹⁾ Имеем $P_0(\xi) = P_1(\xi) = Q(v) = 1$ или $P_0(\xi) = P_1(\xi) = |e^{-2\xi}|$ и $Q(v) = |e^{2v}|$, в зависимости от того, с какой стороны от γ расположена точка ξ ; но поскольку $\phi(v) = J(v) = 0$, то заключение о том, что $\hat{h}(\xi) - h(\xi) = 0$, справедливо в обоих случаях.

Теорема 11.1. При условиях, сформулированных в начале § 11.1, уравнение (11.01) имеет решения $w_j(z)$, $j=1, 2$, голоморфные в \mathbf{D} и зависящие от произвольно выбранных точек a_1 и a_2 , такие, что

$$w_j(z) = f^{-1/4}(z) \exp\{(-1)^{j-1} \xi(z)\} \{1 + \varepsilon_j(z)\}, \quad (11.05)$$

где

$$\xi(z) = \int f^{1/2}(z) dz, \quad (11.06)$$

$$|\varepsilon_j(z)|, |f^{-1/2}(z) \varepsilon'_j(z)| \leq \exp\{\mathcal{V}_{a_j, z}(F)\} - 1, \quad (11.07)$$

при условии, что $z \in \mathbf{H}_j(a_j)$ (см. ниже).

В этой теореме функция контроля ошибки снова имеет вид

$$F(z) = \int \left\{ \frac{1}{f^{1/4}} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{f^{1/4}} \right) - \frac{g}{f^{1/4}} \right\} dz,$$

а ветви дробных степеней функции $f(z)$ должны быть непрерывными в \mathbf{D} , причем $f^{1/2}(z)$ является квадратом функции $f^{1/4}(z)$.

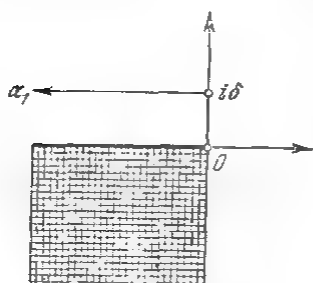


Рис. 11.1. $K_1(-\infty + i\delta)$.

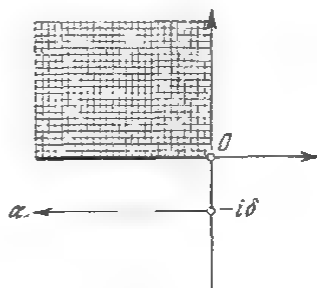


Рис. 11.2. $K_1(-\infty - i\delta)$.

Каждая область справедливости $\mathbf{H}_j(a_j)$ содержит множество точек z , для которых существует путь \mathcal{P} , в \mathbf{D} , связывающий z с a_j , и обладающий следующими свойствами:

- 1) \mathcal{P} состоит из конечной цепочки R_2 -дуг;
- 2) когда t изменяется вдоль \mathcal{P} , от a_j до z , функция $\operatorname{Re} \{\xi(t)\}$ не убывает, если $j=1$, и не возрастает, если $j=2$.

Вариация функции F в (11.07) вычисляется вдоль \mathcal{P} . И наконец, точка a_j может быть бесконечно удаленной, лежащей на кривой \mathcal{L}_j , если \mathcal{P}_j совпадает с \mathcal{L}_j в окрестности a_j , а $\mathcal{V}(F)$ сходится.

11.4. Если не требовать односвязности области \mathbf{D} , то решения уравнения (11.01) будут многозначными функциями. В этом случае каждая ветвь решений $w_j(z)$ удовлетворяет (11.05) и (11.07),

если оказывается, что путь \mathcal{P}_j удовлетворяет в D условиям 1) и 2). Каждая дробная степень функции $f(z)$ снова должна быть непрерывной вдоль \mathcal{P}_j .

Мы будем называть путь \mathcal{P}_j , удовлетворяющий условиям 1) и 2), ξ -*поступательным путем*. Образ \mathcal{P}_j в плоскости переменной ξ будет называться просто *поступательным путем*.

Мы будем называть условие 2) *условием монотонности*, наложенным на области справедливости. Предположим, например, что единственной особой точкой функции $\psi(\xi)$ является $\xi = 0$ и вариация функции контроля ошибки сходится на бесконечности. Мы можем считать Δ состоящей из всей плоскости переменной ξ с выброшенным началом координат, и сделать Δ односвязной, введя разрез вдоль отрицательной действительной полуоси. Положим $\alpha_1 = -\infty + i\delta$, где $\delta (\geq 0)$ — произвольное число. Тогда ξ -образ $K_1(\alpha_1)$ области $H_1(a_1)$ содержит сектор $-\pi/2 < \arg \xi \leq \pi$ (рис. 11.1). Точки в оставшемся квадранте нельзя соединить с α_1 , не нарушая условия монотонности. Области на плоскости переменной ξ , исключенные таким способом, и их z -образы называются *зонами тени*¹⁾. Хотя решение $w_1(z)$ существует и голоморфно в зоне тени, оценки (11.07) в ней неприменимы.

Решение в зоне тени можно построить, полагая $\alpha_1 = -\infty - i\delta$, как указано на рис. 11.2. Оно имеет ту же самую форму (11.05), что и предыдущее решение, но остаточный член $\varepsilon_1(z)$ и область справедливости $H_1(a_1)$ в этих двух случаях совершенно различны.

Хотя выбор отрицательной действительной полуоси в качестве границы для Δ упрощает изображение в этом примере, он слишком сужает области $K_1(\alpha_1)$ (и их z -образы). Если $\alpha_1 = -\infty + i\delta$, область $K_1(\alpha_1)$ можно расширить, вращая разрез в положительном направлении до тех пор, пока он не совпадет с положительной мнимой полуосью. Полная область справедливости принимает тогда вид $-\pi/2 < \arg \xi < 5\pi/2$. Дальнейшему расширению препятствует условие монотонности. Аналогичным образом, при $\alpha_1 = -\infty - i\delta$ максимальная область справедливости разложения $K_1(\alpha_1)$ имеет вид $-5\pi/2 < \arg \xi < \pi/2$.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Пусть $\xi = \pm 1$ — единственные особые точки функции $\psi(\xi)$ и $\mathcal{W}(F)$ сходится на бесконечности. Используя все необходимые римановы листы, указать максимальную область справедливости $K_1(-\infty)$.

11.2. Пусть точка a , находится на бесконечности, а условия 1) и 2) в § 11.3 заменены более сильными условиями:

1) ξ -образ пути \mathcal{P}_j представляет собой многоугольную дугу; 2) когда t изменяется вдоль \mathcal{P}_j от a_j до z , функция $\operatorname{Re} \{ \xi_j(t) \}$ строго возрастает при $j = 1$ или строго убывает при $j = 2$. Показать, что $H_j(a_j)$ является областью [Горн, 1960].

¹⁾ Это название было введено Черри (1950).

§ 12. Асимптотические свойства в случае комплексных переменных

12.1. Асимптотические свойства ЛГ-приближения относительно независимой переменной, установленные в §§ 3 и 4, переносятся на комплексные переменные. Если $\operatorname{Re} \xi \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow a_1$ и $\operatorname{Re} \xi \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow a_2$, то решение $w_1(z)$ является подчиненным в точке a_1 , а $w_2(z)$ — подчиненным в точке a_2 . Как было отмечено в главе 5, § 7.3, построение численно удовлетворительного множества решений может потребовать использования более чем двух точек a_1 и a_2 (сравните упр. 12.1, приведенное ниже).

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 3.1.

Теорема 12.1. Пусть \mathcal{L} — конечный или бесконечный ξ -поступательный путь в \mathbf{D} и a_1, a_2 — его концевые точки. Предположим, что вдоль \mathcal{L} функция F имеет ограниченную вариацию, $\operatorname{Re} \xi \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow a_1$ и $\operatorname{Re} \xi \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow a_2$. Тогда

(1) $\varepsilon_1(z)$ стремится к некоторой постоянной $\varepsilon_1(a_2)$ и

$$f^{-1/2}(z) \varepsilon_1'(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow a_2;$$

(2) $\varepsilon_2(z)$ стремится к некоторой постоянной $\varepsilon_2(a_1)$ и

$$f^{-1/2}(z) \varepsilon_2'(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow a_1;$$

(3) $\varepsilon_1(a_2) = \varepsilon_2(a_1)$;

(4) $|\varepsilon_1(a_2)| \leq \frac{1}{2} |\exp \{ \mathcal{V}_{\mathcal{L}}(F) \} - 1|$.

Доказательство пунктов (1) и (2) этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Пункт (3) доказывается так, как указано в упражнении 3.1. Утверждение пункта (4) можно получить, если просуммировать неравенства

$$|L_s(\xi)| \leq \Psi^{s+1}(\xi)/(s+1)! \quad (s = 0, 1, \dots),$$

выведенные из (3.07), и затем положить $\xi \rightarrow \alpha_2$ в (3.06).

Интересно, что оценка (4) в два раза точнее, чем предельная форма оценки (11.07).

12.2. Как и в § 5, асимптотические свойства относительно параметров естественным образом выводятся из оценок остаточного члена, указанных в теореме 11.1. Дополнительное свойство, появляющееся в комплексном случае, состоит в том, что области справедливости $\mathbf{H}_j(a, \cdot)$ сильно зависят от параметра u . Для уравнения (5.01), например, мы имеем $\xi = u \int f^{1/2}(z) dz$. Если параметр u — комплексный, то ξ -образ области \mathbf{D} будет поворачиваться вокруг начала координат при изменении $\arg u$. Поэтому путь в z -плоскости может быть ξ -поступательным для некоторых значений $\arg u$, но не быть таковым для других, заставляя зоны тени изменяться в зависимости от $\arg u$.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Пусть m — положительное целое число, j — целое число или нуль и $\delta (< 3\pi)$ — положительная постоянная. Показать, что решение уравнения $\frac{d^2 w}{dz^2} = z^{m-2} w$, подчиненное на бесконечности вдоль луча $\arg z = 2j\pi/m$, имеет вид $w(z) = \{1 + O(z^{-m/2})\} z^{(2-m)/4} \exp\{(-1)^{j+1} 2z^{m/2}/m\}$ при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|m \arg z - 2j\pi| \leq 3\pi - \delta$.

Сколько необходимо таких решений, чтобы образовать численно удовлетворительное множество решений в окрестности бесконечности?

12.2. Показать, что если $f(z) = \frac{1}{4} u^2 z^{-1}$ и $g(z) = z^{-1/2}(z+1)^{-3/2}$,

где $u = |u|e^{-i\omega}$ — комплексный параметр, то границы максимальных областей $H_1(\infty e^{-2i\omega})$ проходят по лучу $\arg z = \pi - 2\omega$ и параболу

$$\{(x+1)\sin 2\omega + y \cos 2\omega\}^2 = 4\sin \omega \{(x+1)\sin \omega + y \cos \omega\},$$

где x и y — соответственно действительная и мнимая части переменной z .

§ 13. Выбор поступательных путей

13.1. Новой особенностью, связанной с комплексными переменными, является выбор ξ -поступательных путей \mathcal{P} . Для каждой пары точек z и a , наиболее эффективное использование теоремы 11.1 требует, чтобы \mathcal{P} были определены в D таким образом, что полная вариация функции контроля ошибки $F(z)$ вдоль \mathcal{P} минимизируется, если выполняется условие монотонности.

Для общих D и $F(z)$ решение этой задачи минимизации не существует. В приложениях мы выбираем те пути, которые удовлетворяют условию монотонности и находятся достаточно далеко от особых точек функции F , в том числе от точек поворота дифференциального уравнения. Соответствующие вариации могут не быть минимальными, но они часто достаточно малы для того, чтобы дать удовлетворительные оценки остаточного члена.

В этом параграфе мы покажем, как выбрать действительно минимизирующие пути в специальном случае $f(z) = 1$ и $g(z) = az^{-a-1}$, где a — фиксированное положительное число. Здесь D — плоскость переменной z с исключенным началом координат, $F(z) = z^{-a}$ и $\xi = z$. В силу симметрии достаточно рассмотреть лишь случай $j = 2$. Полагая, что a_2 — бесконечно удаленная точка на действительной положительной полуоси, мы получаем

$$\mathcal{V}_{z,\infty}(F) = \mathcal{V}_{z,\infty}(t^{-a}) = a \int_z^\infty \left| \frac{dt}{t^{a+1}} \right|,$$

причем $\operatorname{Re} t$ не убывает вдоль пути. Тогда $H_2(\infty)$ представляет собой сектор $|\arg z| < 3\pi/2$ (ср. § 11.4). Мы положим $\theta = \arg z$ и изучим по очереди случаи $|\theta| \leq \pi/2$, $\pi/2 < |\theta| \leq \pi$ и $\pi < |\theta| < 3\pi/2$. Но сначала мы установим следующую лемму.

Лемма 13.1. Пусть \mathcal{L} — бесконечная прямая линия в комплексной плоскости, a — положительная постоянная. Тогда

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}}(t^{-a}) = 2\chi(a)d^{-a}, \quad (13.01)$$

где d — кратчайшее расстояние от начала координат до \mathcal{L} и

$$\chi(a) = \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}a + 1\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right). \quad (13.02)$$

Чтобы доказать этот результат, предположим, что z — ближайшая к $t = 0$ точка прямой \mathcal{L} , так что $|z| = d$. Параметрическое уравнение \mathcal{L} можно записать в виде

$$t = z + i\tau z \quad (-\infty < \tau < \infty).$$

Следовательно,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}}(t^{-a}) - a \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{izd\tau}{(z + i\tau z)^{a+1}} \right| = -\frac{2a}{d^a} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1 + \tau^2)^{(a+1)/2}}.$$

Отсюда, если заменить τ^2 на t и использовать упр. 1.3 из главы 2, вытекает равенство (13.01).

Приведем значения $\chi(a)$ с двумя десятичными знаками для первых десяти целых значений a :

$$\begin{aligned} \chi(1) &= 1,57; & \chi(2) &= 2,00; & \chi(3) &= 2,36; & \chi(4) &= 2,67; \\ \chi(5) &= 2,95; & \chi(6) &= 3,20; & \chi(7) &= 3,44; & \chi(8) &= 3,66; \\ \chi(9) &= 3,87; & \chi(10) &= 4,06. \end{aligned}$$

Результаты § 2 главы 2 и § 5 главы 4 показывают, что $\chi(a)$ возрастает в $(0, \infty)$ и $\chi(a) \sim (\pi a/2)^{1/2}$ при $a \rightarrow \infty$.

13.2. (1) $|\theta| \leq \pi/2$. Рассмотрим путь, изображенный на рис. 13.1 и состоящий из части положительной действительной полуоси, дуги окружности радиуса $R (> |z|)$ с центром в начале координат и отрезка прямой

$$t = z + \tau e^{i\theta} \quad (0 \leq \tau \leq R - |z|).$$

Легко видеть, что при $R \rightarrow \infty$ вклады в вариацию интегралов по действительной полуоси и по дуге окружности стремятся к нулю, и мы получаем

$$\mathcal{V}_{z, \infty}(t^{-a}) = \int_0^{\infty} \frac{a d\tau}{|z + \tau e^{i\theta}|^{a+1}} = \int_0^{\infty} \frac{a d\tau}{(|z| + \tau)^{a+1}} = \frac{1}{|z|^a}. \quad (13.03)$$

Так как это выражение равняется модулю разности между значе-

ниями t^a в крайних точках пути, никакой другой путь не может дать меньшей вариации¹⁾.

13.3. (2) $\pi/2 < |\theta| \leq \pi$. Рассмотрим путь, изображенный жирной непрерывной линией на рис. 13.2, если значение θ положительно, или сопряженный путь, если θ отрицательно. Снова, поскольку радиус R дуги окружности стремится к бесконечности, вклады интегралов по этой дуге и по действительной полуоси стремятся к нулю, и мы получаем

$$\mathcal{V}_{z,\infty}(t^{-a}) = \int_0^\infty \frac{ad\tau}{|z + i\tau|^{a+1}} = \int_0^\infty \frac{ad\tau}{\{x^2 + (|y| + \tau)^2\}^{(a+1)/2}}, \quad (13.04)$$

где $x + iy = z$.

Этим выбором вариация минимизируется. Чтобы убедиться в этом, мы пройдем заданное расстояние τ вдоль любого допустимого

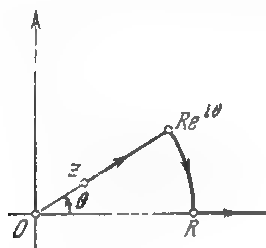


Рис. 13.1. — $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

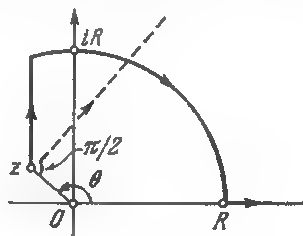


Рис. 13.2. — $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

мого пути от z до некоторой точки t . На этом пути t находится в точке $t_0 = z + it$; для любого другого пути t лежит внутри или на окружности с центром в z и проходящей через t_0 , как это показано на рис. 13.3. Очевидно, что $|t| > |t_0|$ только тогда, когда t лежит внутри заштрихованной дуги, ограниченной этой окружностью и дугой окружности $|t| = |t_0|$. Однако никакой путь не может проходить через эту дугу, так как внутри нее $\operatorname{Re} t < \operatorname{Re} z$. Следовательно, $|t| \leq |t_0|$, и вариация является минимизированной.

Для целых значений a интеграл (13.04) можно выразить через элементарные функции. Например,

$$\mathcal{V}_{z,\infty}(t^{-1}) = \frac{1}{|x|} \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{y} \right| \quad (x \neq 0); \quad \mathcal{V}_{z,\infty}(t^{-1}) = \frac{1}{|y|} \quad (x = 0).$$

¹⁾ Сравните главу 1, упр. 11.4. Строго говоря, (13.03) является не вариацией вдоль допустимого пути, а нижней гранью множества вариаций. Это отличие не является существенным при получении оценок остаточного члена, и мы не будем его подчеркивать.

Но чтобы избежать излишних усложнений в общем случае, мы заменим выражение в скобках в (13.04) его нижней гранью $x^2 + y^2 + \tau^2$. Вычисление дает

$$\mathcal{V}_{z, \infty}(t^{-a}) \leq \chi(a) |z|^{-a}, \quad (13.05)$$

где величина $\chi(a)$ определена формулой (13.02). Из леммы 13.1 следует, что этот чуть более слабый результат эквивалентен использованию ломаного пути на рис. 13.2.

13.4. (3) $\pi < |\theta| < 3\pi/2$. Минимизирующий путь является предельной формой пути, изображенного на рис. 13.4, когда радиус R

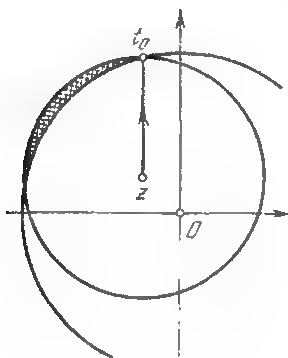


Рис. 13.3. $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

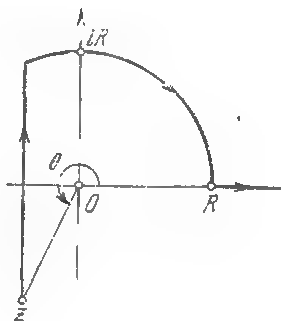


Рис. 13.4. $\pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi$.

дуги стремится к бесконечности. Чтобы проверить это, предположим, что любой другой путь пересекает отрицательную действительную полуось в точке $t = l$. Если $l = x$, то результат вытекает непосредственно из § 13.3. Если $l \in (x, 0)$, то для каждого положительного числа τ мы сравниваем точки круга $|t - l| \leq \tau$ с $t_0 \equiv x - i\tau$. Снова $|t| \leq |t_0|$, исключая точки, лежащие в недопустимой дуге.

Полагая $R \rightarrow \infty$ и используя лемму 13.1, мы получаем

$$\mathcal{V}_{z, \infty}(t^{-a}) \leq 2\chi(a) |\operatorname{Re} z|^{-a}. \quad (13.06)$$

Заметим, что если значение $|z|$ фиксировано и $\arg z \rightarrow \pm 3\pi/2$, то путь движется к началу координат, причем $\mathcal{V}_{z, \infty}(t^{-a}) \rightarrow \infty$. Этого можно было ожидать, поскольку мы приближаемся к границам области справедливости $H_2(\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Показать, что решение уравнения $\frac{d^2 w}{dz^2} = \left(z^2 - \frac{1}{4} z^{-2}\right) w$ имеет вид

$$z^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \{1 + \varepsilon(z)\}, \quad \Re$$

где величина $|\varepsilon(z)|$ оценивается функциями $\exp\left(\frac{1}{2}|z|^{-2}\right) - 1$, $\exp\left(\frac{1}{4}\pi \times \times |z|^{-2}\right) - 1$ или $\exp\left(\frac{1}{2}\pi |\operatorname{Re} z^2|^{-1}\right) - 1$, в зависимости от того, в каком из интервалов $\{0, \pi/4\}$, $(\pi/4, \pi/2)$ или $(\pi/2, 3\pi/4)$ лежит $|\arg z|$.

13.2. Пусть \mathcal{A} — бесконечная R_1 -дуга, причем $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}(t^{-1}) < \infty$ и a — постоянная, $a > 1$. Показать, что $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}(t^{-a}) < \infty$.

13.3. Пусть, $t = t(\sigma)$ — бесконечная R_1 -дуга, σ — дуговой параметр. Показать, что если $|t(\sigma)|^{-1} = O(\sigma^{-\alpha})$ при $\sigma \rightarrow \infty$, где $\alpha > 1/2$, то $\mathcal{V}(t^{-1})$ сходится вдоль дуги.

Показать также, что этим условиям удовлетворяет любая параболлическая дуга.

13.4. Показать, что на пути $t = 1 + it \sin \tau$ ($0 \leq \tau < \infty$) вариация $\mathcal{V}(t^{-a})$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a = 1$.

13.5. Вывести из определения функции $\operatorname{Ei}(x)$, данного в § 3.2 главы 2, что

$$\operatorname{Ei}(x) = -\frac{1}{2} \left(\int_x^{x+i\infty} + \int_{\infty}^{x-i\infty} \right) \frac{e^t}{t} dt \quad (x > 0).$$

Далее с помощью интегрирования по частям доказать, что в асимптотическом разложении

$$\operatorname{Ei}(x) \sim e^x \sum_{s=0}^{\infty} s! x^{-s-1} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

отношение n -го члена к $(n+1)$ -му не может превосходить по абсолютной величине $1 + \chi(n+1)$.

Исторические сведения и дополнительные ссылки

Эта глава основана на работе Олвера (1961). Изложенный там материал был значительно расширен, в особенности в том, что касается двойной асимптотической природы ЛГ-приближения. Наличие явного выражения для оценки остаточного члена сделало изложенную выше теорию более единой и простой.

Приближение (1.08) было независимо использовано Лиувиллем (1837) и Гринном (1837). Ватсон (1949, § 1.4) заметил, что фактически тот же метод был использован Карлини в 1817 г. Физики-теоретики часто называют формулу (1.08) ВКБ приближением на основании работ Вентцеля (1926), Крамерса (1926) и Бриллюэна (1926). Однако вкладом этих авторов было не построение приближения (которое уже было известно), а установление формул, связывающих экспоненциальное и осцилляторное решения в точках поворота на действительной оси. В последнее время к буквам ВКБ иногда добавляют букву Д, чтобы указать, что приближенные формулы связи Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна были получены ранее Джеффрисом (1924). Джеф-

фрис (1953) также указал, что ему предшествовали работы Гапса (1915) и (в меньшей степени) Рейли (1912). Поэтому представляется целесообразным, следуя Джеффрису, связывать приближение (1.08) с именами Линуилля и Грина и оставить обозначение ДВКБ для формул связи.

Дальнейшие исторические сведения можно найти в работах Пайла (1964) и Мак-Хафа (1971).

§ 1. Линуилль (1837) использовал только частный вид преобразования, приведенного в § 1.3. Кантер (1931, 1935) первым использовал более общий вид для построения равномерных асимптотических приближений.

§ 6. Обозначение $U(a, x)$ введено Дж. К. П. Миллером (1968); в этой работе можно найти подробное описание свойств и таблицы функций параболического цилиндра. Обобщение (6.06) на асимптотическое разложение по убывающим степеням и дано Олвером (1959).

§ 8. Некоторые дальнейшие результаты и ссылки, касающиеся оценок остаточных членов для асимптотических приближений нулей, даны Хеттоутом (1970b).

§ 9. Относительно дальнейшего асимптотического исследования собственных значений см. Фикс (1967), Кон (1967) и Паттерер (1969).

§ 10. Эрдейи (1964) был, по-видимому, первым, кто систематически изучал сингулярные интегральные уравнения, возникающие при получении асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведенные теоремы имеют сходство с его результатами.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИРРЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ; ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Решения в виде формальных рядов

1.1. В предыдущей главе мы видели, что в окрестности иррегулярной особой точки решения линейного дифференциального уравнения второго порядка асимптотически представляются ЛГ-функциями. В первых параграфах настоящей главы будет показано, как эти приближения можно обобщить до асимптотических разложений. Используемый метод применим к особой точке любого конечного ранга, однако для простоты изложения мы ограничимся случаем, наиболее часто встречающимся в приложениях, а именно особой точкой ранга 1.

Как и в главе 5, рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0. \quad (1.01)$$

Без потери общности можно предположить, что особая точка находится на бесконечности. Это означает, что существует такая величина круга $|z| > a$, в которой функции $f(z)$ и $g(z)$ разлагаются в сходящиеся степенные ряды вида

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s}. \quad (1.02)$$

При этом хотя бы один из коэффициентов f_0, g_0, g_1 не обращается в нуль, так как в противном случае особая точка была бы регулярной.

В уравнении (1.01) можно исключить слагаемое с первой производной, сделав замену

$$w = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int f(z) dz \right\} y. \quad (1.03)$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = q(z) y, \quad (1.04)$$

где

$$q(z) = \frac{1}{4} f^2(z) + \frac{1}{2} f'(z) - g(z).$$

Если $|z| > a$, то в силу разложений (1.02)

$$q(z) = \frac{1}{4}(f_0^2 - g_0) + \left(\frac{1}{2}f_0f_1 - g_1\right)z^{-1} + \dots \quad (1.05)$$

В §§ 3 и 12 главы 6 было показано, что при соответствующих ограничениях уравнение (1.04) имеет решения, обладающие свойством

$$y \sim q^{-1/4}(z) \exp \left\{ \pm \int q^{1/2}(z) dz \right\}$$

при $z \rightarrow \infty$. Если воспользоваться разложением (1.05), то это представление принимает вид

$$y \sim C \exp \{ \pm \rho z + \sigma \ln z \}, \quad (1.06)$$

где C — постоянная и

$$\rho = \left(\frac{1}{4} f_0^2 - g_0 \right)^{1/2}, \quad \sigma = \left(\frac{1}{4} f_0 f_1 - \frac{1}{2} g_1 \right) / \rho.$$

Формула (1.06) справедлива при условии $\rho \neq 0$; случай, когда $\rho = 0$, рассматривается ниже в § 1.3.

Возвращаясь к первоначальному дифференциальному уравнению, мы получаем из (1.03) и (1.06)

$$w \sim C \exp (\lambda z + \mu \ln z), \quad (1.07)$$

где

$$\lambda = \pm \rho - \frac{1}{2} f_0, \quad \mu = \pm \sigma - \frac{1}{2} f_1.$$

1.2. Поскольку коэффициенты $f(z)$ и $g(z)$ допускают разложение по убывающим степеням z , естественно попытаться обобщить формулу (1.07) и получить решение в виде формального степенного ряда

$$w = e^{\lambda z} z^\mu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}. \quad (1.08)$$

Подставляя это разложение в (1.02) и приравнивая коэффициенты, находим

$$\lambda^2 + f_0 \lambda + g_0 = 0, \quad (1.09)$$

$$(f_0 + 2\lambda) \mu = -(f_1 \lambda + g_1) \quad (1.10)$$

и

$$\begin{aligned} (f_0 + 2\lambda) s a_s &= (s - \mu)(s - 1 - \mu) a_{s-1} + \\ &+ \{\lambda f_2 + g_2 - (s - 1 - \mu) f_1\} a_{s-1} + \{\lambda f_3 + g_3 - (s - 2 - \mu) f_2\} a_{s-2} + \dots \\ &\dots + \{\lambda f_{s+1} + g_{s+1} + \mu f_s\} a_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Первое из этих уравнений определяет два возможных значения λ :

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} f_0 \pm \left(\frac{1}{4} f_0^2 - g_0 \right)^{1/2}.$$

Уравнение (1.10) определяет соответствующие значения μ_1, μ_2 параметра μ . Легко убедиться, что эти значения согласуются с § 1.1.

Значения a_0 , например $a_{0,1}$ и $a_{0,2}$, в этих двух случаях можно выбрать произвольно. Тогда остальные коэффициенты, $a_{s,1}$ и $a_{s,2}$, определяются из рекуррентных соотношений (1.11). Указанный способ становится неэффективным тогда и только тогда, когда $f_0 + 2\lambda = 0$; в этом случае $f_0^2 = 4g_0$.

То, что дифференциальному уравнению в окрестности иррегулярной особой точки удовлетворяет ряд вида (1.08), первым заметил Томе. Этот вид разложения иногда называют *нормальным рядом* или *нормальным решением*, для того чтобы отличать его от разложений типа Лорана для w , хотя фактический выбор названия (как и «регулярная особая точка» или «иррегулярная особая точка») мало нуждается в комментариях. Уравнение (1.09) называется *характеристическим*, а его корни — *характеристическими значениями* особой точки.

1.3. В случае $f_0^2 = 4g_0$ также можно получить асимптотическую форму решений, видоизменяя рассуждения § 1.1. Другой способ, приводящий к тем же результатам, основан на преобразовании Фабри¹⁾

$$w = e^{-f_0 z^{1/2}} W, \quad t = z^{1/2}.$$

Оно приводит к уравнению

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + F(t) \frac{dW}{dt} + G(t) W = 0, \quad (1.12)$$

где

$$F(t) = 2tf(t^2) - 2tf_0 - t^{-1},$$

$$G(t) = t^2 \{4g(t^2) + f_0^2 - 2f_0 f_1(t^2)\}.$$

Уравнение (1.12) имеет тот же вид, что и (1.01). При $|t| > a^{1/2}$ его коэффициенты можно разложить в ряды

$$F(t) = -\frac{2f_1}{t} + \frac{2f_2}{t^3} + \dots, \quad G(t) = (4g_1 - 2f_0 f_1) + \frac{4g_2 - 2f_0 f_2}{t^2} + \dots$$

Если $4g_1 = 2f_0 f_1$, то уравнение (1.12) имеет регулярную особую точку при $t = \infty$ и поэтому допускает решения в виде сходящихся-

¹⁾ Аймс (1939, § 17.53).

ся степенных рядов. Если же $4g_1 \neq 2f_0f_1$, то (1.12) имеет на бесконечности иррегулярную особую точку с *неравными* характеристическими значениями $\pm(2f_0f_1 - 4g_1)^{1/2}$; сравните этот результат с (1.09). Поэтому мы можем построить для W формальное степенное разложение вида (1.08) с заменой z на t .

Таким образом, преобразование Фабри устраняет необходимость в специальной теории¹⁾.

Переход к первоначальным переменным в случае $4g_1 \neq 2f_0f_1$ приводит к решению в виде ряда

$$w = \exp \left\{ -\frac{1}{2} f_0 z \pm (2f_0f_1 - 4g_1)^{1/2} z^{1/2} \right\} z^{(1-2f_1)/4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\hat{a}_s}{s^{s/2}}.$$

Здесь коэффициенты \hat{a}_s также могут быть найдены прямой подстановкой w в первоначальное дифференциальное уравнение. Разложения этого типа, содержащие дробные степени z , называются *субнормальными решениями*.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Дифференциальное уравнение $w'' = (z^2 + z^{-6})w$ имеет особую точку порядка 2 на бесконечности. Показать, что оно может быть преобразовано в уравнение, имеющее соответствующую особую точку ранга 1.

1.2. Найти точное решение уравнения

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{dw}{dz} - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{16z} \right) w = 0 \quad [\text{Аймс, 1939}].$$

1.3. Построить субнормальное решение на бесконечности уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left\{ \frac{2}{z} - \frac{L(L+1)}{z^2} \right\} w = 0,$$

где L — постоянная [Кертис, 1969].

§ 2. Асимптотическая природа формальных рядов

2.1. Рассуждения в § 1 являются чисто формальными. Если бы оказалось, что разложение (1.08) сходится для всех достаточно больших $|z|$, то почленное дифференцирование было бы законным, и ряд определял бы решение дифференциального уравнения. То, что это не всегда так, можно увидеть из следующего. Если в правой части (1.11) отбросить все члены, кроме первого, то

$$a_s/a_{s-1} \sim s/(f_0 + 2\lambda) \quad (s \rightarrow \infty).$$

Это означает, что ряд (1.08) расходится. Следовательно, лишь

¹⁾ Это приятно контрастирует с трудностями, обусловленными совпадением показателей в регулярной особой точке (глава 5, § 5).

в случаях, когда первый член в правой части (1.11) сильно подавляется вкладом остальных слагаемых, — как, например, в упр. 1.2 — появляется возможность для сходимости.

Самое большее, на что можно надеяться в отношении ряда (1.08), состоит, вообще говоря, в том, что он представляет собой асимптотическое разложение решения в некоторой области z -плоскости. Кроме того, естественно ожидать, что эта область будет симметричной относительно направления движения самого сильного убывания при $z \rightarrow \infty$. Так как отношение главных членов формального решения равно $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)z} z^{\mu_1 - \mu_2} a_{0,1} / a_{0,2}$, это направление определяется условием $\arg \{(\lambda_2 - \lambda_1)z\} = 0$ для первого решения и $\arg \{(\lambda_1 - \lambda_2)z\} = 0$ — для второго.

Теорема 2.1. Пусть аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$ комплексной переменной z разлагаются в сходящиеся степенные ряды

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s} \quad (2.01)$$

в области A : $|z| > a$, причем $f_0^2 \neq 4g_0$. Тогда уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(z) \frac{dw}{dz} + g(z) w = 0 \quad (2.02)$$

имеет единственные решения $w_j(z)$, $j = 1, 2$, такие, что в пересечении A с соответствующими секторами¹⁾

$$\begin{aligned} \arg \{(\lambda_2 - \lambda_1)z\} &\leq \pi & (j = 1), \\ \arg \{(\lambda_1 - \lambda_2)z\} &\leq \pi & (j = 2), \end{aligned} \quad (2.03)$$

эти решения голоморфны и

$$w_j(z) \sim e^{\lambda_j z} z^{\mu_j} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s,j}}{z^s} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (2.04)$$

В этой теореме значения λ_j , μ_j и $a_{s,j}$ определяются как в § 1.2. Для функции z^{μ_j} можно брать любую ветвь при условии, что она непрерывна в соответствующем секторе (2.03). Ниже приводится доказательство теоремы.

2.2. Обозначим решение уравнения (2.02) через

$$w(z) = L_n(z) + \varepsilon_n(z),$$

где $L_n(z)$ — n -я частичная сумма

$$L_n(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_{s,1}}{z^s} \quad (2.05)$$

¹⁾ В действительности в A имеются разрезы. Области не максимальны; см. ниже теорему 2.2.

и $\varepsilon_n(z)$ — соответствующий остаточный член. Если подставить $L_n(z)$ в левую часть (2.02) вместо w , то коэффициент при $e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1 - s}$ обращается в нуль при $s = 0, 1, \dots, n$ в силу формул (1.09) — (1.11). Поэтому

$$L_n''(z) + f(z) L_n'(z) + g(z) L_n(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} R_n(z), \quad (2.06)$$

где $R_n(z) = O(z^{-n-1})$ при $z \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_n''(z) + f(z) \varepsilon_n'(z) + g(z) \varepsilon_n(z) = -e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} R_n(z). \quad (2.07)$$

Рассмотрим последнее уравнение. Обозначим через b произвольную постоянную, большую a , и пусть z принадлежит замкнутой области B : $|z| \geq b$. Тогда

$$|R_n(z)| \leq B_n |z|^{-n-1}, \quad (2.08)$$

где B_n — некоторая постоянная. Оставим в левой части уравнения (2.07) только главные члены разложений $f(z)$ и $g(z)$; остальные перенесем в правую часть. Мы приходим к уравнению

$$\varepsilon_n''(z) + f_0 \varepsilon_n'(z) + g_0 \varepsilon_n(z) = -e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} R_n(z) - \{g(z) - g_0\} \varepsilon_n(z) - \{f(z) - f_0\} \varepsilon_n'(z). \quad (2.09)$$

Метод вариации постоянных приводит к эквивалентному интегральному уравнению

$$\varepsilon_n(z) = \int_z^{\infty} e^{-\lambda_1 t} K(z, t) \left[e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1} R_n(t) + \{g(t) - g_0\} \varepsilon_n(t) + \{f(t) - f_0\} \varepsilon_n'(t) \right] dt, \quad (2.10)$$

где

$$K(z, t) = \{e^{\lambda_1(z-t)} - e^{\lambda_2(z-t)}\} / (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Направление интегрирования (т. е. параметр ω) можно выбрать произвольно. Мы выберем его совпадающим с направлением наиболее быстрого убывания искомого решения, а именно,

$$\omega = \arg(\lambda_2 - \lambda_1).$$

2.3. Предположим, что $n > \operatorname{Re} \mu_1 \equiv m_1$, $z \in B$ и $|\arg(z e^{i\omega})| \leq \pi$; уравнение (2.10) можно решить методом последовательных приближений, использованным в предыдущих главах. Положим

$$\varepsilon_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \{h_{s+1}(z) - h_s(z)\}, \quad (2.11)$$

где последовательность $\{h_s(z)\}$ определяется условиями $h_0(z) \equiv 0$ и

$$h_{s+1}(z) = \int_z^{\infty e^{i\omega} - i\omega} K(z, t) [e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1} R_n(t) + \\ + \{g(t) - g_0\} h_s(t) + \{f(t) - f_0\} h'_s(t)] dt \quad (2.12)$$

где $s \geq 0$. Контур интегрирования выбирается так, что его образ в $te^{i\omega}$ -плоскости состоит из следующих частей: 1) прямолинейного отрезка, проходящего через точку $ze^{i\omega}$, перпендикулярно к прямой, соединяющей эту точку с началом координат; 2) дуги окружности большого радиуса с центром в начале координат; 3) части положительной действительной полуоси (рис. 2.1).

На этом контуре $\operatorname{Re}\{(\lambda_2 - \lambda_1)t\}$ не убывает, и поэтому

$$|K(z, t)| \leq \frac{2|e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1}|}{|\lambda_1 - \lambda_2|}, \quad \left| \frac{\partial K(z, t)}{\partial z} \right| \leq \frac{(|\lambda_1| + |\lambda_2|) |e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1}|}{|\lambda_1 - \lambda_2|}.$$

Так как $|\arg(te^{i\omega})| \leq \pi$, то

$$|t^{\mu_1}| \leq M |t|^{m_1}, \quad M \equiv \exp\{(\pi + |\omega|) |\operatorname{Im} \mu_1|\}.$$

Пологая $s = 0$ в (2.12) и в производной этого выражения по z , используя только что полученные оценки и (2.08), мы находим, устремляя радиус круговой дуги на рис. 2.1 к бесконечности, что

$$\frac{|h_1(z)|}{2}, \quad \frac{|h'_1(z)|}{|\lambda_1| + |\lambda_2|} \leq \frac{MB_n}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \frac{\chi(n - m_1)}{n - m_1} \frac{e^{\lambda_1 z}}{|z|^{n - m_1}},$$

где χ — функция, введенная в лемме 13.1 главы 6.

Отправляясь от этого результата, мы можем по индукции проверить, что

$$\frac{|h_{s+1}(z) - h_s(z)|}{2}, \quad \frac{|h'_{s+1}(z) - h'_s(z)|}{|\lambda_1| + |\lambda_2|} \leq \frac{MB_n \beta^s}{|\lambda_1 - \lambda_2|^{s+1}} \left\{ \frac{\chi(n - m_1)}{n - m_1} \right\}^{s+1} \frac{|e^{\lambda_1 z}|}{|z|^{n - m_1}} \quad (2.13)$$

при $s = 0, 1, \dots$, где число

$$\beta = \sup_{t \in \Gamma} [|t| \{ 2 |g(t) - g_0| + (|\lambda_1| + |\lambda_2|) |f(t) - f_0| \}]$$

конечно (сравните (2.01)).

Предположим теперь, что n выбрано достаточно большим и удовлетворяющим условию

$$|\lambda_1 - \lambda_2| (n - m_1) > \beta \chi(n - m_1); \quad (2.14)$$

это возможно, так как

$$\chi(n - m_1) \sim \left(\frac{1}{2} \pi n \right)^{1/2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда ряд (2.11) сходится равномерно в любом компактном множестве, содержащемся в пересечении \mathbf{B} и разрезанной плоскости $|\arg ze^{i\omega}| \leq \pi$. Поэтому почленное дифференцирование ряда законно, и из формулы (2.12) видно, что его сумма является аналитической функцией, удовлетворяющей интегральному уравнению (2.10) и, следовательно, дифференциальным уравнениям (2.07) и (2.09).

Оценки (2.13) показывают, что

$$e_n(z), e'_n(z) = O(e^{\lambda_1 z} z^{n_1 - n}) \quad (z \rightarrow \infty).$$

Поэтому для достаточно больших значений n уравнение (2.02) имеет аналитическое решение $w_{n,1}(z)$, обладающее свойством

$$w_{n,1}(z) = e^{\lambda_1 z} z^{n_1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{a_{s,1}}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right\}$$

Рис. 2.1. $te^{i\omega}$ -плоскость;
 $\omega = \arg\{\lambda_2 - \lambda_1\}$.

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg\{(\lambda_2 - \lambda_1)z\}| \leq \pi$. Аналогичным образом, заменяя индекс 1 на 2, можно убедиться, что существует еще одно аналитическое решение $w_{n,2}(z)$, такое, что

$$w_{n,2}(z) = e^{\lambda_2 z} z^{n_2} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{a_{s,2}}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right\}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg\{(\lambda_1 - \lambda_2)z\}| \leq \pi$.

Осталось показать, что $w_{n,1}(z)$ и $w_{n,2}(z)$ не зависят от n . Если n_1 и n_2 — допустимые значения n , то функции $w_{n_1,1}(z)$ и $w_{n_2,1}(z)$ — подчиненные по сравнению с $w_{n_1,2}(z)$ или $w_{n_2,2}(z)$ при $z \rightarrow \infty e^{-i\omega}$; следовательно, их отношение не зависит от z . Оно равно единице, что можно установить, полагая $z \rightarrow \infty e^{-i\omega}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для $w_{n,2}(z)$. Этим завершается доказательство теоремы 2.1.

2.4. Область, в которой асимптотические разложения справедливы, можно расширить.

Теорема 2.2. Если δ — сколь угодно малая положительная постоянная, то разложение (2.04) справедливо для аналитического продолжения $w_j(z)$ в секторе

$$\begin{aligned} |\arg\{(\lambda_2 - \lambda_1)z\}| &\leq 3\pi/2 - \delta \quad (j=1), \\ |\arg\{(\lambda_1 - \lambda_2)z\}| &\leq 3\pi/2 - \delta \quad (j=2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Кроме того, если разложение не сходится, то этот сектор справедливости разложения максимален.

Указанное расширение можно провести, видоизменяя рассуждения § 2.3. Если, например, $j=1$ и

$$\pi \leq \arg(ze^{i\omega}) \leq 3\pi/2 - \delta, \quad (2.16)$$

то вместо пути, изображенного на рис. 2.1, нужно использовать прямолинейный отрезок, проходящий через точку $ze^{i\omega}$ параллельно мнимой оси и пересекающей действительную ось, вместе с дугой окружности большого радиуса и частью действительной оси.

Ниже дается другое доказательство, которое также устанавливает вторую часть теоремы.

Пусть $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — решения, указанные в теореме 2.1. Тогда $w_1(ze^{-2\pi i})$ — также решение уравнения (2.2). Это решение — доминирующее при $z \rightarrow \infty$ по лучу $\arg z = \pi - \omega$ и поэтому линейно независимое с $w_2(z)$. Тогда существуют такие постоянные A и B , что

$$w_1(z) = Aw_1(ze^{-2\pi i}) + Bw_2(z). \quad (2.17)$$

Полагая $z \rightarrow \infty e^{i(\pi-\omega)}$, мы получаем, что $A = e^{2\pi i \mu_1}$. Значение B таким образом определить нельзя, но поскольку δ — положительное число, функция $Bw_2(z)$ при больших z равномерно экспоненциально мала по сравнению с $e^{2\pi i \mu_1} w_1(ze^{-2\pi i})$ в секторе (2.16). Поэтому $Bw_2(z)$ не дает вклада в смысле Пуанкаре в асимптотическое разложение аналитического продолжения $w_1(z)$. Следовательно, при $j = 1$ разложение (2.04) справедливо в секторе (2.16). Аналогичные рассуждения можно провести для сопряженного сектора и для второго решения.

Далее, если в (2.17) постоянная B не равна нулю, то очевидно, что область справедливости разложения (2.04) при $j = 1$ нельзя расширить через луч $\arg(ze^{i\omega}) = 3\pi/2$.

Применяя теорему (7.2) главы 1 к функции $e^{-\lambda_1 z} z^{-\mu_1} w_1(z)$ мы получаем из (2.17), что B обращается в нуль тогда и только тогда, когда разложение (2.04) сходится. Такое же рассмотрение можно провести для луча $\arg(ze^{i\omega}) = -3\pi/2$ и для второго решения. Доказательство теоремы 2.2 завершено.

Теорема 2.2 иллюстрирует общее правило, заключающееся в том, что на пути интегрирования условие монотонности как необходимо, так и достаточно. Другими словами, зоны тени (глава 6, § 11.4) — это действительно те области, которые следует исключить.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Показать, что при большом z уравнение

$$w'' = \{(z+4)/z\}^{1/2} w$$

имеет асимптотические решения

$$e^{-z} \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{44}{3z^4} + \dots \right), \quad e^z \left(z + 1 - \frac{1}{2z} + \frac{2}{3z^2} + \dots \right),$$

справедливые в областях $|\arg(\pm z)| \leq (3\pi/2) - \delta$ ($\delta < 3\pi/2$) соответственно.

2.2. Показать, что уравнение

$$w'' + (z^{-4} \cos z)w = 0$$

имеет асимптотическое решение

$$w \sim \left(z + \frac{3}{32} z^3 + \dots \right) \cos \left(\frac{1}{z} \right) + \left(-\frac{1}{4} z^3 + \frac{107}{1152} z^5 + \dots \right) \sin \frac{1}{z}$$

при $z \rightarrow 0$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$).

§ 3. Уравнения, содержащие параметр

3.1. Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения зависят от комплексного параметра u :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + f(u, z) \frac{dw}{dz} + g(u, z)w = 0. \quad (3.01)$$

Часто бывает важно знать, являются ли решения, определяемые теоремой 2.1, голоморфными функциями u .

Теорема 3.2 главы 5 ответа на этот вопрос не дает, поскольку не задано ни одной обычной точки со свойствами, сформулированными в условии (IV) этой теоремы.

Теорема 3.1. Пусть u изменяется в фиксированной комплексной области U , а z изменяется в фиксированной области A : $|z| > a$. Допустим, что для любого u функции $f(u, z)$ и $g(u, z)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1 и следующим условиям.

I. Коэффициенты f_0 и g_0 ряда (2.01) не зависят от u . Остальные коэффициенты $f_s \equiv f_s(u)$ и $g_s \equiv g_s(u)$ — голоморфные функции u .

II. Если u изменяется в любой компактной области $U_c \subset U$, то $|f_s(u)| \leq F_s^{(c)}$ и $|g_s(u)| \leq G_s^{(c)}$, где $F_s^{(c)}$ и $G_s^{(c)}$ не зависят от u и ряды $\sum F_s^{(c)} z^{-s}$ и $\sum G_s^{(c)} z^{-s}$ абсолютно сходятся в A .

III. Коэффициенты $a_{0,1}$ и $a_{0,2}$ — голоморфные функции u . Тогда в любой точке z области A любая ветвь решений $w_1(z)$, $w_2(z)$ и их двух первых частных производных по z является функцией, голоморфной по u .

Применение признака равномерной сходимости показывает, что функции $f(u, z)$ и $g(u, z)$ непрерывны по двум переменным и голоморфны по u при фиксированном z . Чтобы доказать эту теорему, мы проследим все этапы доказательства теоремы 2.1, имея в виду, что любая встречающаяся величина, за исключением λ_1 и λ_2 , может зависеть от u (ср. (1.09)).

Из сформулированных условий и определений § 1.2 немедленно следует, что любая из величин μ_1 , μ_2 , $a_{s,1}$ и $a_{s,2}$ голоморфна по u . Отсюда вытекает, что обрезанный ряд (2.05) непрерывен по u , z и голоморфен по u . То же самое верно и относительно его частных производных $L'_n(z)$ и $L''_n(z)$, а следовательно, и для

$R_n(z)$. Далее, если $u \in U_c$, то величина B_n в (1.08) не зависит от u . Единственными величинами в оценке (2.13), которые зависят от u , являются M , β и m_1 . В силу определений M и β можно заменить их оценками сверху, которые не зависят от u в U_c . А поскольку величина $|m_1|$ ограничена, легко видеть, что ряд (2.11) и его формальная производная по z сходятся в U_c равномерно для всех $n \geq N_c$, где N_c — подходящая постоянная.

Применение теоремы 1.1 главы 2 к (2.12) при $s = 0$ показывает, что функция $h_1(z)$ голоморфна по u . Кроме того, из равномерной сходимости следует, что $h_1(z)$ непрерывна по u и z . Аналогично рассуждая, мы получаем тот же результат для производной выражения (2.12) и, далее (по индукции), для $h_s(z)$ и $h'_s(z)$, $s = 1, 2, \dots$

Таким образом, мы доказали, что если $u \in U_c$, z лежит в пересечении B и сектора $|\arg(ze^{i\omega})| \leq \pi$ и $n \geq N_c$, то: а) каждый член ряда (2.11) и его производная по z голоморфны по u , б) этот ряд и ряд, полученный из него формальным дифференцированием по z , сходятся равномерно по u . Следовательно, функции $\varepsilon_n(z)$, $\varepsilon'_n(z)$, $w_1(z)$ и $w'_1(z)$ голоморфны по u в области U_c . А так как $w_1(z)$ не зависит от n (§ 2.3), то $w_1(z)$ и $w'_1(z)$ голоморфны во всей области U . Голоморфность $w'_1(z)$ вытекает непосредственно из уравнения (3.01).

Поскольку число b может быть выбрано произвольно близким к a , то теорема 3.1 доказана для $w_1(z)$ при $z \in A$ и $|\arg\{(\lambda_2 - -\lambda_1)z\}| \leq \pi$. Для других ветвей результат следует из теоремы 3.2 главы 5, если в качестве z_0 взять любую конечную точку из пересечения области A и сектора $|\arg\{(\lambda_2 - \lambda_1)\}| \leq \pi$. Аналогичные рассуждения справедливы и для второго решения. Доказательство закончено.

3.2. Условие независимости f_0 и g_0 от u является несущественным, однако без него рассуждения значительно усложняются, поскольку ω - и z -области справедливости асимптотического разложения (2.04) зависят от u . Во всех приложениях, встречающихся в этой книге, f_0 и g_0 от u не зависят.

§ 4. Функции Ганкеля; явление Стокса

4.1. Мы применим изложенную выше теорию к уравнению Бесселя (глава 2, § 9.2)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) w = 0. \quad (4.01)$$

Порядок v может быть действительным или комплексным.

В обозначениях §§ 1, 2 имеем $f_1 = 1$, $g_0 = 1$, $g_2 = -v^2$; все остальные коэффициенты равны нулю. Из уравнений (1.09) и

(1.10) мы находим, что $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\mu_1 = \mu_2 = -1/2$. При $a_{0,1} = a_{0,2} = 1$ рекуррентные соотношения (1.11) приводят к формулам $a_{s,1} = i^s A_s(v)$ и $a_{s,2} = (-i)^s A_s(v)$, где

$$A_s(v) = \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2) \dots \{4v^2 - (2s-1)^2\}}{s! 8^s}. \quad (4.02)$$

Умножая решения, определенные теоремами 2.1 и 2.2, на нормирующие множители $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left\{\mp\left(\frac{1}{2}v \mp \frac{1}{4}\right)\pi i\right\}$, мы видим, что уравнение (4.01) имеет единственные решения $H_v^{(1)}(z)$, $H_v^{(2)}(z)$, такие, что

$$H_v^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\pi} \sum_{s=0}^{\infty} i^s \frac{A_s(v)}{z^s} \quad (-\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta), \quad (4.03)$$

$$H_v^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s \frac{A_s(v)}{z^s} \quad (-2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta) \quad (4.04)$$

при $z \rightarrow \infty$, где δ — сколь угодно малая положительная постоянная,

$$\zeta = z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi, \quad (4.05)$$

и ветвь функции $z^{1/2}$ определяется условием

$$z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}i\arg z\right). \quad (4.06)$$

Эти решения называются *функциями Ганкеля порядка v* , а формулы (4.03) и (4.04) иногда называют *разложениями Ганкеля*. Обе функции $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ аналитичны по z , их единственными возможными особыми точками являются особенности, определяемые дифференциальным уравнением, а именно 0 и ∞ . Хотя разложения Ганкеля справедливы только в определенных секторах, сами решения могут быть аналитически продолжены на *любое* значение $\arg z$ (глава 5, § 3.1). Главные ветви соответствуют неравенству $-\pi < \arg z \leq \pi$.

При $z \rightarrow \infty$ в секторе $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ функция $H_v^{(1)}(z)$ является подчиненной, а $H_v^{(2)}(z)$ — доминирующей; в секторе $-\pi + \delta \leq \arg z \leq -\delta$ они меняются ролями. В соответствии с этим функции Ганкеля являются линейно независимыми решениями и образуют численно удовлетворительную пару при больших z в секторе $|\arg z| \leq \pi$ (но не всюду).

Далее, для фиксированного отличного от нуля z любая ветвь $H_v^{(1)}(z)$, $H_v^{(2)}(z)$, $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ представляет собой целую функцию v . Это непосредственно следует из теоремы 3.1.

Наконец, функции $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(\bar{z})$ комплексно сопряжены;

это вытекает из того, что $\overline{H_v^{(2)}(\bar{z})}$ удовлетворяет (4.01) и тем же самым граничным условиям, которые наложены на $H_v^{(1)}(z)$. Это свойство позволяет из формул для одной из функций Ганкеля получать соответствующие формулы для другой функции.

4.2. Поскольку $H_v^{(1)}(z)$, $H_v^{(2)}(z)$ и $J_v(z)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению, существует формула, связывающая эти функции:

$$J_v(z) = AH_v^{(1)}(z) + BH_v^{(2)}(z).$$

В главе 4, § 9 методом Лапласа было показано, что

$$J_v(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \cos \xi \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s}(v)}{z^{2s}} - \sin \xi \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s+1}(v)}{z^{2s+1}} \right\} \quad (4.07)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ($\delta < \pi$), где ξ и $A_s(v)$ определены в § 4.1. Выделяя главные члены в (4.03), (4.04) и (4.07) и полагая $z \rightarrow \infty e^{i\pi/2}$, мы находим, что $B = 1/2$. Аналогично, полагая $z \rightarrow \infty e^{-i\pi/2}$, получаем $A = 1/2$. Таким образом,

$$J_v(z) = \frac{1}{2} \{H_v^{(1)}(z) + H_v^{(2)}(z)\} \quad (4.08)$$

для всех z , отличных от нуля.

Поскольку уравнение (4.01) не меняется при изменении знака v , то в качестве другой пары решений этого уравнения можно взять $H_{-v}^{(1)}(z)$ и $H_{-v}^{(2)}(z)$. Как и $H_v^{(1)}(z)$, функция $H_{-v}^{(1)}(z)$ является подчиненной на бесконечности в секторе $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$; следовательно, отношение $H_{-v}^{(1)}(z)/H_v^{(1)}(z)$ не должно зависеть от z . Значение этого отношения можно найти, если заменить v на $-v$ в формулах (4.03) и (4.05); тогда

$$H_{-v}^{(1)}(z) = e^{i\pi v} H_v^{(1)}(z). \quad (4.09)$$

Аналогично,

$$H_{-v}^{(2)}(z) = e^{-i\pi v} H_v^{(2)}(z). \quad (4.10)$$

Из (4.08) — (4.10) мы получаем

$$J_{-v}(z) = \frac{1}{2} \{e^{i\pi v} H_v^{(1)}(z) + e^{-i\pi v} H_v^{(2)}(z)\}. \quad (4.11)$$

Исключая функции $H_v^{(2)}(z)$ и $H_v^{(1)}(z)$ из (4.08) и (4.11), находим

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{i\{e^{-v\pi i} J_v(z) + J_{-v}(z)\}}{\sin v\pi},$$

$$H_v^{(2)}(z) = -\frac{i\{e^{v\pi i} J_v(z) - J_{-v}(z)\}}{\sin v\pi}.$$
(4.12)

Когда v — целое число или нуль, каждую из этих дробей можно замесить ее предельным значением, так как функции Ганкеля непрерывны по v .

Формулы для аналитических продолжений $H^{(1)}(ze^{m\pi i})$ и $H_v^{(2)}(ze^{m\pi i})$, где m — произвольное целое число, получаются из (4.08), (4.11), (4.12) и тождества (глава 2, § 9.3)

$$J_{\pm v}(ze^{m\pi i}) = e^{\pm mv\pi i} J_{\pm v}(z).$$

Имеем

$$H_v^{(1)}(ze^{m\pi i}) = -[\sin\{(m-1)v\pi\} H_v^{(1)}(z) + e^{-v\pi i} \sin(mv\pi) H_v^{(2)}(z)]/\sin v\pi,$$
(4.13)

$$H_v^{(2)}(ze^{m\pi i}) = [e^{v\pi i} \sin(mv\pi) H_v^{(1)}(z) + \sin\{(m+1)v\pi\} H_v^{(2)}(z)]/\sin v\pi.$$
(4.14)

Если v — целое число или нуль, то снова нужно рассмотреть предельное значение. Эти формулы подтверждают, что точка $z=0$ является точкой ветвления функций Ганкеля любого порядка v .

4.3. Формулы (4.13) и (4.14) дают возможность построить асимптотические разложения функций Ганкеля при любом значении аргумента. Взяв, например, $m=2$ в (4.13), мы получаем

$$H_v^{(1)}(ze^{2\pi i}) = -H_v^{(1)}(z) - (1 + e^{-2v\pi i}) H_v^{(2)}(z).$$
(4.15)

Когда $|\arg z| \leq \pi - \delta$, мы можем подставить в правую часть этого равенства разложения (4.03) и (4.04). Заменяя затем z на $ze^{-2\pi i}$, приходим к формуле¹⁾:

$$H_v^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} i^s \frac{A_s(v)}{z^s} + (1 + e^{-2v\pi i}) e^{-i\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-i)^s \frac{A_s(v)}{z^s} \right\}.$$

$$(\pi + \delta \leq \arg z \leq 3\pi - \delta).$$
(4.16)

Отметим, что разложения (4.03) и (4.16) функции $H_v^{(1)}(z)$ отличаются друг от друга в области $\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta$, где

¹⁾ Ветвь функции $z^{1/2}$ определяется условием $\arg z^{1/2} = \frac{1}{2} \arg z$.

оба они справедливы. Однако в этом секторе функция e^{-z} экспоненциально мала по сравнению с e^z и, следовательно, вкладом второго ряда в (4.16) можно пренебречь (в смысле Пуанкаре), сколько бы членов ряда мы ни взяли. Поэтому никакого противоречия в разложениях нет.

Обобщение на другие области изменения аргумента можно получить аналогичным образом, выбирая подходящее значение m в (4.13). Во всех случаях мы получаем составное асимптотическое разложение вида (4.16), включающее в себя оба ряда с некоторыми коэффициентами.

Стокс (1857) был первым, кто обратил внимание на то, что постоянные, входящие в составное разложение, меняются скачком, когда аргумент асимптотической переменной меняется непрерывно. Наличие таких скачков называется *явлением Стокса*; оно не ограничивается решениями уравнения Бесселя. Полное понимание этого явления требует более глубокого анализа остаточных членов (см. ниже § 13.2).

4.4. Интегральные представления для функций Ганкеля можно получить следующим образом. При выводе асимптотического разложения для $J_\nu(z)$ в главе 4, § 9 мы рассмотрели отдельно вклады интегралов ¹⁾

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^{z \sinh t - \nu t} dt \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z \sinh t - \nu t} dt. \quad (4.17)$$

С помощью дифференцирования под знаком интеграла непосредственно проверяется, что каждый из этих интегралов удовлетворяет уравнению (4.01). Рассматривая их разложения при больших z (глава 4, (9.07)), мы убеждаемся, что *когда $|\arg z| < \pi/2$, первое из выражений (4.17) равно $H_\nu^{(1)}(z)$, а второе равно $H_\nu^{(2)}(z)$.*

Соответствующие представления для других областей изменения аргумента можно построить с помощью повторной деформации контура интегрирования.

Например, если $\delta \leq \arg z \leq (\pi/2) - \delta$, то

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\infty - (\pi i/2)}^{\infty + (\pi i/2)} e^{z \sinh t - \nu t} dt. \quad (4.18)$$

Аналитическое продолжение распространяет этот результат на область $0 < \arg z < \pi$. Легко видеть, что общие формулы

¹⁾ Знак t был изменен.

имеют вид

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty - \alpha i}^{\infty + (\pi - \alpha)i} e^{z \operatorname{sh} t - v t} dt, \quad (4.19)$$

$$H_v^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty - \alpha i}^{\infty + (\pi + \alpha)i} e^{z \operatorname{sh} t - v t} dt,$$

где α — произвольное число и $-(\pi/2) + \alpha < \arg z < (\pi/2) + \alpha$. Эти формулы называются *интегралами Зоммерфельда*.

Непосредственным следствием формул (4.19) является то, что $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям для функций $J_\nu(z)$, приведенным в главе 2, § 9.5. Можно отметить, что в основе этих рекуррентных соотношений лежит выбор нормирующего множителя в формулах (4.03) и (4.04).

4.5. Другой тип контурных интегралов для функций Ганкеля связан с интегралом Пуассона (глава 2, упр. 7.5):

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{\mathcal{C}} \cos zt (1 - t^2)^{\nu - (1/2)} dt \quad \left(\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2} \right).$$

Дифференцируя под знаком интеграла, убеждаемся, что уравнению Бесселя удовлетворяет любой контурный интеграл вида

$$z^\nu \int_{\mathcal{C}} e^{\pm izt} (t^2 - 1)^{\nu - (1/2)} dt,$$

при условии, что ветвь $(t^2 - 1)^{\nu - (1/2)}$ непрерывна вдоль пути \mathcal{C} и подынтегральное выражение принимает начальное значение в конце \mathcal{C} .

Когда $|\arg z| < \pi/2$ и $\nu \neq 1/2, 3/2, \dots$, подходящий выбор пути и нормирующего множителя приводит к формулам

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu (1+i)}{\pi^{3/2} i} \int_{1+i\infty}^1 e^{izt} (t^2 - 1)^{\nu - (1/2)} dt, \quad (4.20)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu (1+i)}{\pi^{3/2} i} \int_1^{1+i\infty} e^{-izt} (t^2 - 1)^{\nu - (1/2)} dt. \quad (4.21)$$

Оба контура представляют собой петли, не охватывающие точку $z = -1$, причем функция $(t^2 - 1)^{\nu - 1/2}$ в пересечении с интервалом $(1, \infty)$ принимает главное значение. Такие представления известны под названием *интегралов Ганкеля*. Чтобы проверить эти формулы, заметим, что интегралы сходятся равномерно в сек-

торе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$ и подынтегральные функции обращаются в нуль в граничных точках. Поэтому каждый из интегралов удовлетворяет уравнению Бесселя.

Применение леммы Ватсона для интегралов по петле (глава 4, § 5.3) показывает, что асимптотическое поведение правых частей (4.20) и (4.21) согласуется с (4.03) и (4.04) в секторе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Доказать для вронскианов формулу

$$\begin{aligned} \mathscr{W}\{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\} &= -2\mathscr{W}\{J_\nu(z), H_\nu^{(1)}(z)\} = \\ &= 2\mathscr{W}\{J_\nu(z), H_\nu^{(2)}(z)\} = -4i/(\pi z). \end{aligned}$$

4.2. Показать, что когда ν равно половине нечетного положительного или отрицательного целого числа, асимптотические разложения (4.03), (4.04) и (4.07) дают точные выражения для функций Бесселя.

§ 5. Функция $Y_\nu(z)$

5.1. У нас имеется теперь три стандартных решения уравнения Бесселя: $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. Они характеризуются следующими свойствами: 1) в регулярной особой точке $z = 0$ функция $J_\nu(z)$ — подчиненная, если $\operatorname{Re} \nu > 0$ или $\nu = 0$; 2) в бесконечно удаленной иррегулярной особой точке функция $H_\nu^{(1)}(z)$ — подчиненная в секторе $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, а функция $H_\nu^{(2)}(z)$ — в сопряженном секторе.

Следовательно, функции $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ образуют численно удовлетворительную пару решений во *всем* секторе $0 \leq \arg z \leq \pi$ при условии, что $\operatorname{Re} \nu \geq 0$. Аналогично, пара $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ является численно удовлетворительной всюду в секторе $-\pi \leq \arg z \leq 0$.

В важном частном случае действительных переменных $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ обладают тем недостатком, что являются комплексными функциями. Поэтому необходимо ввести еще одно стандартное решение. Функция $J_{-\nu}(z)$ для этой цели не подходит, поскольку не является линейно независимой от $J_\nu(z)$ при всех значениях ν . Обычно выбирают в качестве такого решения функцию Вебера, определяемую для всех значений ν и z формулой¹⁾

$$Y_\nu(z) = \{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\}/2i. \quad (5.01)$$

¹⁾ Иногда функцию $Y_\nu(z)$ обозначают через $N_\nu(z)$. Ее часто называют функцией Бесселя второго рода, а $J_\nu(z)$ — первого рода. При этой терминологии функции Ганкеля называются функциями Бесселя третьего рода.

Главная ветвь $Y_\nu(z)$ получается из главных ветвей $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. То, что $Y_\nu(z)$ принимает действительные значения при действительном ν и положительном z , следует из последнего абзаца § 4.1. Из (4.03) и (4.04) мы выводим составное разложение

$$Y_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left\{ \sin \zeta \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s}(\nu)}{z^{2s}} + \cos \zeta \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s+1}(\nu)}{z^{2s+1}} \right\} \quad (5.02)$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta$ независимо от того, действительное ν или комплексно. Сравнение с разложением (4.07) показывает, что, в отличие от $J_\nu(z)$, решение $Y_\nu(z)$ линейно независимо от $J_\nu(z)$ при всех значениях ν . Если ν — действительное, а z — большое положительное число, то асимптотически $Y_\nu(z)$ имеет ту же самую амплитуду колебаний, что и $J_\nu(z)$, со сдвигом фазы $\frac{1}{2}\pi$; эти свойства и мотивируют выбор функции $Y_\nu(z)$ в качестве стандартного решения. Другое привлекательное свойство заключается в том, что $Y_\nu(z)$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, которым удовлетворяют $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$.

Связь между четырьмя стандартными решениями уравнения Бесселя выражается легко запоминающимися формулами:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \quad (5.03)$$

Необходимо, по-видимому, подчеркнуть, что $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ образуют численно удовлетворительную пару только на действительной оси или в окрестности $z = 0$ (когда $\operatorname{Re} \nu \geq 0$). При больших комплексных z оба решения являются доминирующими во всех областях изменения аргумента¹⁾.

Графики функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ для действительных переменных приведены на рис. 5.1 и 5.2.

5.2. Разложение $Y_\nu(z)$ по возрастающим степеням z можно вывести из степенных рядов для функций $J_{-\nu}(z)$ и формулы

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}, \quad (5.04)$$

которая в свою очередь получается из (4.12) и (5.01). Особый интерес представляет случай, когда ν — целое число, например, равное n , поскольку тогда числитель и знаменатель одновременно обращаются в нуль. Так как $Y_\nu(z)$ — целая функция ν , то по

¹⁾ Это проверяется с помощью упр. 5.3; см. ниже.

правилу Лопиталья¹⁾ находим

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=n} + \frac{(-1)^n}{\pi} \left[\frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \right]_{v=-n}, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.05)$$

Из этого соотношения непосредственно следует, что $Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$; поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $n \geq 0$.

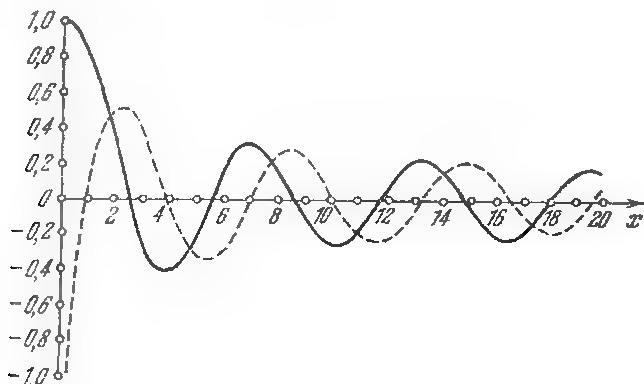


Рис. 5.1. $J_0(x)$ — и $Y_0(x)$ — — —.

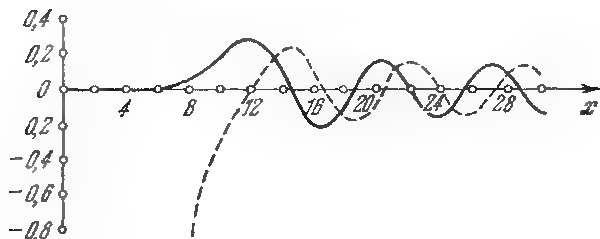


Рис. 5.2. $J_{10}(x)$ — и $Y_{10}(x)$ — — —.

Из формулы (9.09) главы 2 можно вывести разложение

$$\frac{\partial J_v(z)}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}z\right)^v \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{4}z^2\right)^s}{s! \Gamma(v+s+1)} \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}z\right) - \psi(v+s+1) \right\}, \quad (5.06)$$

где, как и раньше, ψ обозначает логарифмическую производную

¹⁾ Эта процедура является, в сущности, методом Фробениуса (глава 5, § 5.3).

гамма функции. Полагая $\nu = \pm n$ и учитывая, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \rightarrow 0, \quad \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \rightarrow (-1)^{m+1} (-m)!,$$

когда z стремится к неположительному целому числу m , мы получаем искомое разложение

$$Y_n(z) = -\frac{(z/2)^{-n}}{\pi} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(-\frac{1}{4} z^2\right)^{-s} - \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2} z\right) J_n(z) - \\ - \frac{\left(\frac{1}{2} z\right)^n}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \{\psi(s+1) + \psi(n+s+1)\} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{4} z^2\right)^s}{s! (n+s)!}. \quad (5.07)$$

Оно сходится для всех z , отличных от нуля.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Доказать, что $\mathcal{W}\{J_\nu(z), Y_\nu(z)\} = J_{\nu+1}(z) Y_\nu(z) - J_\nu(z) Y_{\nu+1}(z) = 2/(\pi z)$.

5.2. Показать, что при любом целом n

$$J_{-n-1/2}(z) = (-1)^{n-1} Y_{n+1/2}(z), \quad Y_{-n-1/2}(z) = (-1)^n J_{n+1/2}(z).$$

5.3. Показать, что при любом целом m

$$Y_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i} Y_\nu(z) + 2i \sin(m\nu\pi) \operatorname{ctg}(\nu\pi) J_\nu(z).$$

5.4. Из формулы (5.05) и упр. 2.2 и 9.5 к главе 2 вывести, что

$$Y_0(z) = 4\pi^{-2} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \theta) \{\gamma + \ln(2z \sin^2 \theta)\} d\theta$$

(γ — постоянная Эйлера).

5.5. Вывести из интегралов Ганкеля (§ 4.5) интегралы Мелера — Сонина

$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{\sin(xt) dt}{(t^2-1)^{\nu+(1/2)}}, \\ Y_\nu(x) = -\frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_1^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2-1)^{\nu+(1/2)}},$$

где $|\operatorname{Re} \nu| < 1/2$ и $x > 0$. Используя метод стационарной фазы, убедиться, что асимптотика правых частей согласуется с главными членами разложения (4.07) и (5.02), когда $\nu \in (-1/2, 1/2)$.

5.6. С помощью индукции доказать, что если n — положительное целое число или нуль, то

$$\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = \frac{\pi}{2} Y_n(z) + \frac{n!}{2 \left(\frac{1}{2} z \right)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2} z \right)^s J_s(z)}{s! (n-s)},$$

$$\left[\frac{\partial Y_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = -\frac{\pi}{2} J_n(z) + \frac{n!}{2 \left(\frac{1}{2} z \right)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2} z \right)^s Y_s(z)}{s! (n-s)}.$$

5.7. Интегрируя разложение $J_\nu(t)$ почленно, доказать, что при $\operatorname{Re} a > 0$ и $\operatorname{Re}(\nu + \mu) > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-at} t^{\mu-1} J_\nu(t) dt &= \\ &= \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{2^\nu a^{\mu+\nu}} F\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}; \nu + 1; -a^{-2}\right), \end{aligned}$$

где F — гипергеометрическая функция, введенная в главе 5, и для всех функций берутся главные значения.

5.8. Интегрируя по частям, доказать, что при $\operatorname{Re} \nu > -1$

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-at} J_\nu(t) dt = \int_0^\infty J_\nu(t) dt.$$

Объединяя этот результат с предыдущим выражением и равенством (10.15) из главы 5, вывести формулы

$$\int_0^\infty J_\nu(t) dt = 1 \quad (\operatorname{Re} \nu > -1)$$

$$\int_0^\infty Y_\nu(t) dt = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \nu \quad (|\operatorname{Re} \nu| < 1).$$

§ 6. Нули функции $J_\nu(z)$

6.1. Во многих приложениях функций Бесселя существенно используются свойства нулей. В §§ 6 и 7 мы ограничимся рассмотрением функции Бесселя $J_\nu(z)$ с действительными значениями порядка ν .

Теорема 6.1. 1) Нули (по z) любого решения уравнения Бесселя являются простыми, исключая, возможно, точку $z = 0$.

2) Нули (по z) производной любого решения уравнения Бесселя являются простыми, исключая, возможно, точки $z = 0$ и $z = \pm \nu$.

Эта теорема является частным случаем более общего результата относительно дифференциальных уравнений второго поряд-

ка. Чтобы доказать ее, предположим, что $w(z_0) = w'(z_0) = 0$, где z_0 — обычная точка дифференциального уравнения. Тогда из доказательства теоремы 1.1 главы 5 следует, что $w(z) \equiv 0$. Аналогично, если $w'(z_0) = w''(z_0) = 0$, то из уравнения Бесселя вытекает равенство $w(z_0) = 0$ при условии, что $z_0 \neq \pm v$; завершается доказательство так же, как в предыдущем случае.

Если z стремится к бесконечности вдоль положительной действительной полуоси, то асимптотическое разложение (4.07) показывает, что $J_v(z)$ бесконечно часто раз меняет знак. Следовательно, каждая из функций $J_v(z)$ и $J'_v(z)$ имеет бесконечно число положительных действительных нулей. Кроме того, поскольку $J_v(ze^{m\pi i}) = e^{mv\pi i} J_v(z)$ при целом m , все ветви $J_v(z)$ и $J'_v(z)$ имеют бесконечно число нулей на положительной и отрицательной действительных полуосях.

Положительные нули $J_v(z)$, расположенные в порядке возрастания, обозначаются через $j_{v,1}, j_{v,2}, \dots$. Аналогично, s -й положительный нуль $J'_v(z)$ обозначается через $j'_{v,s}$.

6.2. Теорема 6.2¹⁾. Все нули функции $J_v(z)$ действительны, если $v \geq -1$; все нули функции $J'_v(z)$ действительны, если $v \geq 0$.

Прежде всего, при данных предположениях относительно v ни один нуль не может быть чисто мнимым, поскольку все члены степенных рядов для $(z/2)^{-v} J_v(z)$ и $(z/2)^{1-v} J'_v(z)$ положительны или равны нулю при $\operatorname{Re} z = 0$.

Далее, рассмотрим тождество

$$(a^2 - \beta^2) \int_0^z t J_v(\alpha t) J_v(\beta t) dt = z \left\{ J_v(\alpha z) \frac{dJ_v(\beta z)}{dz} - J_v(\beta z) \frac{dJ_v(\alpha z)}{dz} \right\} \quad (v \geq -1), \quad (6.01)$$

которое легко проверить, если продифференцировать его и использовать уравнение Бесселя. Если α — корень $J_v(z)$ или $J'_v(z)$ то в силу принципа симметрии Шварца комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}$ также является корнем. Мы можем положить $z = 1$ и $\beta = \bar{\alpha}$ в (6.01); тогда если выполняются условия $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$ и $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$, то

$$\int_0^1 t J_v(\alpha t) J_v(\bar{\alpha} t) dt = 0.$$

Мы получим противоречие, поскольку подынтегральное выражение положительно. Теорема доказана.

¹⁾ Ломмель (1868, § 19).

Когда $-1 < \nu < 0$, единственным отличием является то, что $J'_\nu(z)$ имеет, кроме действительных корней, еще пару чисто мнимых корней; это легко установить, используя формулу (6.01) и степенной ряд. Если $\nu < -1$ и не равно целому числу, то такой метод доказательства становится неприменимым, так как интеграл в (6.01) расходится на нижнем пределе. На самом деле можно показать, что в этом случае имеются комплексные корни¹⁾.

6.3. Для доказательства теоремы этого пункта нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.1. Для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , не зависящее от ν , что в интервале $(0, \delta]$ изменения x функция $J_\nu(x)$ не имеет корней при $\nu \in [-1 + \varepsilon, \infty]$, а $J'_\nu(x)$ не имеет корней при $\nu \in [\varepsilon, \infty]$.

Если $\nu \geq -1 + \varepsilon$ и $0 < x \leq \delta$, то из представления в виде степенного ряда следует

$$\left| \frac{\Gamma(\nu+1) J_\nu(x)}{\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu} - 1 \right| = \left| \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{4}x^2\right)^s}{(\nu+1)_s s!} \right| \leq \frac{\exp\left(\frac{1}{4}\delta^2\right) - 1}{\varepsilon} < 1,$$

при условии, что $\delta^2 < 4 \ln(1 + \varepsilon)$. Поэтому $J_\nu(x)$ в нуль не обращается. Для $J'_\nu(x)$ доказательство аналогично.

Теорема 6.3. Если s фиксировано, то $j_{\nu,s}$ является дифференцируемой функцией ν в интервале $(-1, \infty)$, а $j'_{\nu,s}$ в интервале $(0, \infty)$.

Чтобы установить первый результат, предположим, что ε — произвольное положительное число и a — любая точка из $[-1 + \varepsilon, \infty)$. Из теоремы 6.1 вытекает соотношение $J'_a(j_{a,s}) \neq 0$. Поэтому в силу теоремы о неявной функции существует такая дифференцируемая функция $j(\nu)$, что $j(a) = j_{a,s}$ и $J_\nu\{j(\nu)\} = 0$ в некоторой окрестности $N(a)$. Когда ν изменяется непрерывным образом в $N(a)$, график $J_\nu(x)$ (см. рис. 5.1 и 5.2) также изменяется непрерывно. Из леммы 6.1 следует, что слева в интервал $0 < x \leq j(\nu)$ не могут войти никакие новые нули и ни один из имеющихся $s-1$ нулей не может выйти из интервала с этой стороны. Кроме того, появление или исчезновение нуля в любой другой точке интервала исключено, поскольку на графике видно, что для критических значений ν нуль должен быть многократным, что противоречит теореме 6.1.

Таким образом, $j_{\nu,s} = j(\nu)$ в $N(a)$. Так как a и ε произвольны, функция $j_{\nu,s}$ непрерывна и дифференцируема всюду в $(-1, \infty)$.

Доказательство для $j'_{\nu,s}$ аналогично, с одним лишь отличием: сначала необходимо доказать, что $j'_{\nu,s}$ не может быть кратным

¹⁾ Ватсон (1949, § 15.27).

пунктом $J'_\nu(x)$ при $\nu > 0$. Степенной ряд показывает, что функции $J_\nu(x)$ и $xJ'_\nu(x)$ положительны и возрастают, когда x положительно и достаточно мало. Из уравнения Бесселя, записанного в виде

$$x \{xJ'_\nu(x)\}' - (\nu^2 - x^2) J_\nu(x),$$

следует, что в интервале $0 < x < \nu$ функции $\{xJ'_\nu(x)\}'$ и $J_\nu(x)$ обращаются в нуль одновременно, или не обращаются вообще.

Пусть x_ν — минимальное значение x , при котором они обращаются в нуль; если они отличны от нуля, положим $x_\nu = \nu$. Тогда $\{xJ'_\nu(x)\}'$ принимает положительные значения в интервале $(0, x_\nu)$; отсюда вытекает, что функции $xJ'_\nu(x)$ и $J'_\nu(x)$ положительны в $(0, x_\nu]$. Поэтому $J_\nu(x_\nu) > 0$, откуда $x_\nu = \nu$ и, следовательно, $J'_\nu(x) > 0$ при $x \in (0, \nu]$. В силу сказанного $j'_{\nu,1} > \nu$ ($\nu > 0$). Из теоремы 6.1 следует теперь, что никакое значение $j'_{\nu,s}$ не может быть кратным корнем $J'_\nu(x)$. Теорема 6.3 доказана.

6.4. Теорема 6.4. Если ν — положительное число, то $j_{\nu,s}$ — возрастающая функция ν .

Дифференцирование уравнения $J_\nu(j_{\nu,s}) = 0$ приводит к соотношению

$$J'_\nu(j_{\nu,s}) \frac{dj_{\nu,s}}{d\nu} + \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{x=j_{\nu,s}} = 0. \quad (6.02)$$

Для вычисления второго слагаемого мы используем тождество

$$\int \frac{J_\mu(x) J_\nu(x)}{x} dx = \frac{x \{J'_\mu(x) J_\nu(x) - J_\mu(x) J'_\nu(x)\}}{\mu^2 - \nu^2}$$

($\mu^2 \neq \nu^2$), которое проверяется дифференцированием (ср. (6.01)). Полагая $\mu \rightarrow \nu$, получаем равенство

$$\int \frac{J_\nu^2(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2\nu} \left\{ J_\nu(x) \frac{\partial J'_\nu(x)}{\partial \nu} - J'_\nu(x) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right\}.$$

При условии, что $\nu > 0$, пределы интегрирования можно считать равными 0 и $j_{\nu,s}$; тогда

$$\int_0^{j_{\nu,s}} \frac{J_\nu^2(x)}{x} dx = -\frac{j_{\nu,s}}{2\nu} J'_\nu(j_{\nu,s}) \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{x=j_{\nu,s}}.$$

Подставляя это выражение в (6.02), получаем

$$\frac{dj_{\nu,s}}{d\nu} = \frac{2\nu}{j_{\nu,s} \{J'_\nu(j_{\nu,s})\}^2} \int_0^{j_{\nu,s}} \frac{J_\nu^2(x)}{x} dx \quad (\nu > 0),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

6.5. Асимптотические разложения для больших положительных нулей функции $J_\nu(z)$ можно найти, обращая разложение (4.07). В качестве первого приближения мы имеем соотношение

$$\cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O(z^{-1}) = 0.$$

Отсюда можно способом, указанным в главе 1, § 5.2, вывести, что

$$z = s\pi + \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi + O(s^{-1}),$$

где s — большое положительное целое число.

Для вычисления членов более высокого порядка положим $\alpha \equiv \left(s + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi$. Тогда для больших z

$$\begin{aligned} z - \alpha &\sim -\operatorname{arclg} \left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{s+1}(\nu)}{z^{2s+1}} \right\} / \left\{ \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s}(\nu)}{z^{2s}} \right\} \sim \\ &\sim -\frac{4\nu^2 - 1}{8z} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 25)}{384z^3} - \dots \end{aligned}$$

Замена переменной z на α приводит к разложению Мак-Магона¹⁾

$$z \sim \alpha - \frac{4\nu^2 - 1}{8\alpha} - \frac{(4\nu^2 - 1)(28\nu^2 - 31)}{384\alpha^3} - \dots \quad (s \rightarrow \infty). \quad (6.03)$$

Действительно ли это разложение представляет s -й корень $J_\nu(z)$, а не какой-либо другой, например, $s-1$ -й? Общий метод решения задач такого типа опирается на принцип аргумента.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри односвязной области, содержащей простой замкнутый контур \mathcal{C} . Предположим, что число нулей $f(z)$ подсчитывается согласно их кратности и они не лежат на \mathcal{C} . Тогда число нулей внутри \mathcal{C} равно умноженному на $1/(2\pi)$ приращению $\arg\{f(z)\}$, когда z обходит \mathcal{C} один раз в положительном направлении.

В интересующем нас случае можно рассуждать проще. Разложение (6.03), как легко видеть, равномерно относительно ν в любом компактном интервале. Если $\nu = 1/2$, то положительные нули $J_\nu(z)$ равны $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$; ср. главу 2, упр. 9.3. Следовательно, разложение (6.03) определяет $j_{\nu,s}$ для этого значения ν и в силу непрерывности (теорема 6.3) для всех $\nu \in (-1, \infty)$.

¹⁾ Относительно следующих членов разложения см. Р. С. (1960). Явной формулы для общего члена нет.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Показать, что если ν — положительное число, то

$$j'_{\nu,1} < j_{\nu,1} < j'_{\nu,2} < j_{\nu,2} < j'_{\nu,3} < \dots$$

6.2. Используя метод § 6.4, показать, что $dj'_{\nu,s}/d\nu > 0$ при $\nu > 0$.

6.3. Используя упр. 6.1, показать, что если ν фиксировано и положительно, а $\beta \equiv \left(s + \frac{1}{2}\nu - \frac{3}{4}\right)\pi$, то

$$j'_{\nu,s} = \beta - \frac{4\nu^2 + 3}{8\beta} - \frac{112\nu^4 + 328\nu^2 - 9}{384\beta^3} + O\left(\frac{1}{s^5}\right).$$

6.4. Пусть для любого положительного числа s функция $\varphi_s(\nu)$ определяется формулой $\varphi_s(\nu) = j_{\nu,s}$, если $\nu > -1$, и формулой $\varphi_s(\nu) = j_{\nu,s-k}$, если $-1-k < \nu \leq -k$ для всех $k = 1, 2, \dots, s-1$. Показать, что функции $\varphi_s(\nu)$ дифференцируемы всюду в $(-s, \infty)$.

§ 7. Нули функции $Y_\nu(z)$ и других цилиндрических функций

7.1. Функции вида

$$\mathcal{E}_\nu(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x), \quad (7.01)$$

где A и B не зависят от x (но могут зависеть от ν), называются *цилиндрическими функциями порядка ν* . Это название возникло в связи с тем, что такие функции играют важную роль при решении уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

Теорема 7.1. *Положительные нули двух любых линейно независимых действительных цилиндрических функций одного и того же порядка чередуются.*

Это утверждение является частным случаем общей теоремы о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Чтобы доказать теорему 7.1, возьмем одну из цилиндрических функций в виде (7.01), а другую — в виде

$$\mathcal{D}_\nu(x) = CJ_\nu(x) + DY_\nu(x).$$

Используя упражнение 5.4, мы получаем

$$\mathcal{E}_\nu(x)\mathcal{D}'_\nu(x) - \mathcal{E}'_\nu(x)\mathcal{D}_\nu(x) = 2(AD - BC)/\pi x.$$

Поскольку $\mathcal{E}_\nu(x)$ и $\mathcal{D}_\nu(x)$ независимы, $AD - BC \neq 0$ (ср. главу 5, теорему 1.2). В положительном нуле функции $\mathcal{E}_\nu(x)$ ее производная $\mathcal{E}'_\nu(x)$ отлична от нуля (теорема 6.1); в последующих нулях $\mathcal{E}'_\nu(x)$ имеет противоположные знаки, поскольку $\mathcal{D}_\nu(x)$ имеет противоположные знаки. Поэтому нечетное число нулей функции $\mathcal{D}_\nu(x)$ отделяет каждую последовательную пару нулей функции $\mathcal{E}_\nu(x)$. Аналогично нечетное число нулей $\mathcal{E}_\nu(x)$ отделяет каждую последовательную пару нулей $\mathcal{D}_\nu(x)$. Теперь утверждение теоремы становится очевидным.

Полагая $\mathcal{D}_\nu(x) = J_\nu(x)$, мы видим, что все действительные цилиндрические функции имеют бесконечное число положительных нулей.

7.2. Часто s -е положительные нули функций $Y_\nu(x)$ и $Y'_\nu(x)$ обозначаются соответственно через $y_{\nu,s}$ и $y'_{\nu,s}$.

Теорема 7.2. Если $\nu > -1/2$, то

$$y_{\nu,1} < j_{\nu,1} < y_{\nu,2} < j_{\nu,2} < \dots \quad (7.02)$$

Теорема 7.1 показывает, что в каждом из интервалов $(j_{\nu,1}, j_{\nu,2})$, $(j_{\nu,2}, j_{\nu,3})$, ... имеется точно один нуль функции Y_ν и либо один нуль, либо ни одного в интервале $(0, j_{\nu,1})$. Нам нужно лишь доказать, что в этом интервале имеется один нуль.

Если $\nu > -1$, то функция $J_\nu(x)$ положительна при $x \rightarrow +0$, откуда $J'_\nu(j_{\nu,1}) < 0$. Полагая $x = j_{\nu,1}$ во вронскиане, приведенном в упр. 5.1, мы видим, что $Y_\nu(j_{\nu,1}) > 0$. Далее, с помощью уравнений (5.04) и (5.07) можно проверить, что при $x \rightarrow +0$ функция $Y_\nu(x)$ имеет асимптотику вида

$$-\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu}, \quad \frac{2}{\pi} \ln x, \quad -\frac{1}{\pi} \cos(\nu\pi) \Gamma(-\nu) \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu, \quad (7.03)$$

в зависимости от того, какое из условий $\nu > 0$, $\nu = 0$ или $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ выполняется. Во всех трех случаях знак отрицателен и противоположен знаку $Y_\nu(x)$ в точке $x = j_{\nu,1}$. Доказательство закончено.

7.3. Как и в доказательстве теоремы 6.3, каждый нуль функции $Y_\nu(x)$ локально является дифференцируемой функцией ν . Теорема 7.2 показывает, что нумерация положительных нулей $Y_\nu(x)$ не может измениться, когда ν непрерывно меняется в интервале $(-1/2, \infty)$. Поэтому при фиксированном s нуль $y_{\nu,s}$ является дифференцируемой функцией всюду в $(-\frac{1}{2}, \infty)$.

Аналога теоремы 6.2 для $Y'_\nu(z)$ и $Y'_\nu(z)$ не существует; это становится очевидным из приведенного ниже упр. 7.5. Остающаяся теорема в § 6, а именно теорема 6.4, имеет аналог для функции $Y_\nu(x)$. Действительно, $j_{\nu,s}$ возрастает в интервале $\nu \in (-1, \infty)$, а $y_{\nu,s}$ возрастает в интервале $\nu \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Однако имеющиеся доказательства¹⁾ достаточно сложны, и поскольку эти результаты использоваться не будут, их доказательства мы опускаем.

¹⁾ Ватсон (1949, § 15)

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Предположим, что коэффициенты A и B в формуле (7.01) не зависят от v . Рассматривая производные функций $x^{-v}\mathcal{E}_v(x)$ и $x^{v+1}\mathcal{E}_{v+1}(x)$, показать, что положительные нули $\mathcal{E}_v(x)$ и $\mathcal{E}_{v+1}(x)$ чередуются.

7.2. В обозначениях § 7.1 показать, что нули функций $\mathcal{E}'_v(x)$ и $\mathcal{Z}'_v(x)$, превосходящие $|\nu|$, чередуются.

7.3. Используя метод § 6.2, доказать, что в секторе $|\arg z| < \pi/2$ нули функций $Y_0(z)$ и $Y_1(z)$ действительны.

7.4. Показать, что при $\nu > -1/2$ асимптотическое разложение $y_{\nu,s}$ для больших s дается правой частью формулы (6.03) при $\alpha = \left(s + \frac{1}{2}\nu - \frac{3}{4}\right)\pi$.

7.5. Пусть n — нуль или целое положительное число. Используя упр. 5.3, показать, что $Y_n(z)$ имеет бесконечное множество нулей в секторе $0 < \arg z < \pi$, лежащих на кривой, имеющей луч $\arg z = (1/2)i \ln 3 = \pi$ в качестве асимптоты.

7.6*. Пусть ν фиксировано, $\nu > -1/2$ и

$$\mathcal{E}_\nu(x, t) = J_\nu(x) \cos(\pi t) + Y_\nu(x) \sin(\pi t),$$

где t — положительный параметр. Показать, что уравнению $\mathcal{E}_\nu(x, t) = 0$ удовлетворяет корень $x = \rho(t)$, где $\rho(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция со следующими свойствами:

$$\rho(s) = j_{\nu,s}, \quad \rho(s - 1/2) = y_{\nu,s} \quad (s — \text{любое положительное целое число}),$$

$$\rho(+0) = 0 \quad (\nu \geq 0), \quad \rho(-\nu + 0) = 0 \quad (-1/2 < \nu < 0).$$

Показать также, что

$$2\rho^2\rho'\rho''' - 3\rho^2\rho'^2 + (4\rho^2 + 1 - 4\nu^2)\rho'^4 - 4\nu^2\rho^2\rho'^2 = 0$$

и

$$\left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{E}_\nu(x, t)}{\partial x} \right]_{x=\rho(t)} \right\}^2 = \frac{2}{\rho\rho'} \quad (\text{Олвер, 1950}),$$

где штрих обозначает дифференцирование по t .

§ 8. Модифицированные функции Бесселя

8.1. В главе 2, § 10 мы построили решение $I_\nu(z)$ модифицированного уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0. \quad (8.01)$$

Отличительным свойством этого решения является подчиненность в регулярной особой точке $z = 0$ при $\operatorname{Re} \nu > 0$ или $\nu = 0$. Так как уравнение Бесселя преобразуется в (8.01) заменой z на iz , другим решением является функция *Макдональда*

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(ze^{\pi i/2}). \quad (8.02)$$

В этом определении правая часть принимает главное значение при $\arg z = 0$; для других значений $\arg z$ ветви $K_\nu(z)$ определя-

ются по непрерывности. Главная ветвь соответствует значениям $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Сформулируем некоторые важные свойства $K_\nu(z)$:

(1) функция $K_\nu(z)$ действительна при действительных значениях ν и положительных z (более точно, при $\arg z = 0$),

(2) функция $K_\nu(z)$ является подчиненной на бесконечности в секторе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta (< \pi/2)$ для всех значений ν .

Свойство (1) выводится непосредственно из интегрального представления

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt$$

$$\left(|\arg z| < \frac{1}{2}\pi\right), \quad (8.03)$$

которое можно получить из интеграла Зоммерфельда (4.18), заменяя z на iz и t на $t + \pi i/2$. Для свойства (2) примем из (4.03)

$$K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s(\nu)}{z^s}$$

($z \rightarrow \infty$ в $|\arg z| \leq (3\pi/2) - \delta$). (8.04)

Графики функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ при $\nu = 0$ и $\nu = 10$ изображены на рис. 8.1.

8.2. Формулы для модифицированных функций Бесселя легко выводятся из соответствующих формул для немодифицированных функций. Например,

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \pi \{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\} \sin \nu \pi, \quad (8.05)$$

$$Y_\nu(ze^{\pi i/2}) = e^{(\nu+1)\pi i/2} I_\nu(z) - \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-\nu\pi i/2} K_\nu(z), \quad (8.06)$$

$$\mathscr{W}\{I_\nu(z), I_{-\nu}(z)\} = -\frac{2 \sin \nu \pi}{\pi z}, \quad \mathscr{W}\{K_\nu(z), I_\nu(z)\} = \frac{1}{z}. \quad (8.07)$$

В формуле (8.05) при целом или равном нулю ν правая часть заменяется ее предельным значением. В (8.06) ветви принимают главные значения при $-\pi < \arg z \leq \pi/2$. Вронскиан (8.07) показывает, что функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ линейно независимы при всех ν ; для $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ это не так. Из свойств, сформулированных в § 8.1, видно, что функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ образуют численно удовлетворительную пару во всем секторе $|\arg z| \leq \pi/2$ при условии $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

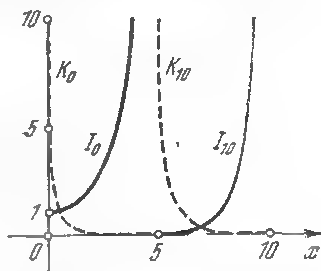


Рис. 8.1. Модифицированные функции Бесселя порядков 0 и 10.

Асимптотическое разложение для $I_\nu(z)$ получается из (4.03), (4.04) и из формулы связи

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2} e^{-\nu\pi i/2} \{H_\nu^{(1)}(ze^{\pi i/2}) + H_\nu^{(2)}(ze^{i\pi/2})\}.$$

Пренебрегая экспоненциально малыми вкладами¹⁾, мы находим, что

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_s(\nu)}{z^s} \\ (z \rightarrow \infty \text{ в } |\arg z| \leq \pi/2 - \delta). \quad (8.08)$$

8.3. Далее нам понадобится следующий результат:

Теорема (8.1)²⁾. (1) Если $\nu (\geq 0)$ фиксировано, то во всем интервале $x \in (0, \infty)$ функция $I_\nu(x)$ положительна и возрастает, а $K_\nu(x)$ — положительна и убывает.

(2) Если $x (> 0)$ фиксировано, то во всем интервале $\nu \in (0, \infty)$ функция $I_\nu(x)$ убывает, а $K_\nu(x)$ возрастает.

Часть (1) легко выводится из степенного разложения для $I_\nu(x)$, данного в главе 2, (10.01), и из интегрального представления (8.03). Указанное в части (2) свойство $K_\nu(x)$ также непосредственно вытекает из (8.03). Чтобы проверить оставшиеся свойства $I_\nu(x)$, выведем, дифференцируя второе из выражений (8.07), равенство

$$K'_\nu(x) \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} - K_\nu(x) \frac{\partial I'_\nu(x)}{\partial \nu} = I'_\nu(x) \frac{\partial K_\nu(x)}{\partial \nu} - I_\nu(x) \frac{\partial K'_\nu(x)}{\partial \nu}. \quad (8.09)$$

Рассмотрим правую часть. Степенные ряды для $I_\nu(x)$ и $I'_\nu(x)$ показывают, что обе эти функции положительны при положительных ν и x . Дифференцируя (8.03), мы находим, что функция $\frac{\partial K_\nu(x)}{\partial \nu}$ положительна, а $\frac{\partial K'_\nu(x)}{\partial \nu}$ — отрицательна. Поэтому правая часть формулы (8.09) положительна.

Рассмотрим теперь $\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu}$ при фиксированных положительных значениях ν . При $x \rightarrow +0$ имеем

$$\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial x} = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}x\right) + O(1) \right\}.$$

Следовательно, $\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} < 0$ для всех достаточно малых x . Если

¹⁾ См. также § 13, особенно упр. 13.2.

²⁾ Часть (2) теоремы получена недавно; см. Кохран (1967), Э. Л. Джоунс (1968) и Рейдник (1968). Приведенное доказательство принадлежит Кохрану.

x непрерывно возрастает, то либо производная $\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu}$ остается отрицательной, либо мы достигаем некоторого значения $x = x_\nu$, в котором $\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu}$ обращается в нуль. В последнем случае легко видеть на рис. 8.1, что функция $\frac{\partial I'_\nu(x)}{\partial \nu}$ неотрицательна в x_ν . Поэтому левая часть равенства (8.09) неположительна при $x = x_\nu$, что противоречит нашему выводу о знаке правой части. Таким образом, x_ν не существует, т. е. $\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} < 0$ при всех положительных ν и x . Доказательство теоремы 8.1 закончено.

8.4. Свойства нулей (по переменной z) функции $I_\nu(z)$ можно вывести из свойств $J_\nu(z)$ (§ 6) с помощью поворота плоскости переменных z на прямой угол. Например, при $\nu \geq -1$ все нули $I_\nu(z)$ чисто мнимые и образуют сопряженные пары.

Теорема 8.2¹⁾. При действительном ν функция $K_\nu(z)$ не имеет нулей в секторе $|\arg z| \leq \pi/2$.

Равенство (8.05) показывает, что

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \quad (\nu - \text{любое}). \quad (8.10)$$

В силу принципа симметрии Шварца

$$K_\nu(\bar{z}) = \overline{K_\nu(z)} \quad (\nu - \text{действительное}). \quad (8.11)$$

Следовательно, чтобы доказать теорему, достаточно установить, что $K_\nu(z)$ не имеет нулей в секторе $-\pi/2 \leq \arg z \leq 0$ при $\nu \geq 0$. Мы сделаем это, применив принцип аргумента (§ 6.5) к контуру $ABCD$, изображенному на рис. 8.2. На этом рисунке часть AB — это четверть окружности $|z| = r$, а CD — четверть окружности $|z| = j\nu, s$ (в обозначениях § 6). Затем мы положим $r \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$.

На AB значение $|z|$ мало. Из (8.06) и из комплексной формы соотношения (7.03) получаем

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) (z/2)^{-\nu} \quad (\nu > 0); \quad K_0(z) \sim -\ln z. \quad (8.12)$$

Следовательно, при малых r изменение аргумента $K_\nu(z)$ имеет вид

$$\Delta_{AB} \arg \{K_\nu(z)\} = \frac{1}{2} \nu \pi + o(1) \quad (\nu \geq 0).$$

¹⁾ Макдональд (1899).

На BC положим $z = te^{-\pi i/2}$, где t — положительная переменная. Из (5.03) и (8.02) имеем

$$K_v(te^{-\pi i/2}) = \frac{1}{2} \pi i e^{\pi i/2} \{J_v(t) + iY_v(t)\}.$$

При $t = r$ функция $Y_v(t)$ отрицательна и велика по абсолютной величине (ср. (7.03)), а $J_v(t)$ ограничена и положительна.

Вспомогая свойства $J_v(t)$ и $Y_v(t)$, установленные в предыдущих параграфах, особенно в § 7, мы видим, что график $J_v(t) + iY_v(t)$ от $t = r$ до $t = j_{v,2}$ имеет вид, изображенный на рис. 8.3, а его продолжение от $t = j_{v,2}$ до $t = j_{v,1}$ обходит начало координат $(s/2) - 1$ раз в положительном направлении. Поэтому для малых r

$$\Delta_{BC} \arg \{K_v(z)\} = \pi + o(1).$$

На CD значения $|z|$ велики; из (8.04) мы получаем

$$\Delta_{CD} \arg \{K_v(z)\} = -\frac{1}{4} \pi - j_{v,s} + o(1).$$

Рис. 8.3. $J_v(t) + iY_v(t)$.

Наконец, на DA нет изменения аргумента, так как функция $K_v(z)$ действительна и положительна.

Объединяя все вклады, мы приходим к формуле

$$\Delta_{ABCD} \arg \{K_v(z)\} = \frac{1}{2} \pi + \pi - \frac{1}{4} \pi - j_{v,s} + o(1). \quad (8.13)$$

Здесь снова, поскольку s велико, значение $j_{v,s}$ можно заменить на $\left(s + \frac{1}{2} v - \frac{1}{4}\right) \pi$ с ошибкой $o(1)$ (ср. § 6.5). Тогда при $r \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ правая часть (8.13) обращается в нуль, и теорема доказана.

Дальнейшая информация о нулях $K_v(z)$ имеется ниже в упр. 8.7.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Показать, что функция $e^{\pi i t} K_v(z)$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, которым удовлетворяет $I_v(z)$, и что

$$I_v(z) K_{v+1}(z) + I_{v+1}(z) K_v(z) = \frac{1}{z}.$$

8.2. Показать, что при любом целом m

$$K_v(z e^{m \pi i}) = e^{-m \pi i} K_v(z) - \pi i \sin(m \pi) \operatorname{cosec}(\pi) I_v(z).$$

8.3. Вывести из (5.07) и (8.06), что если m — неотрицательное целое число, то

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z \right)^{-n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(-\frac{1}{4} z^2 \right)^s + (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{1}{2} z \right) I_n(z) +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z \right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \{ \psi(s+1) + \psi(n+s+1) \} \frac{\left(\frac{1}{4} z^2 \right)^s}{s! (n+s)!}.$$

8.4. Вывести из интеграла Ганкеля (4.20) представление

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2} (z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2-1)^{\nu-(1/2)} dt \quad (\operatorname{Re} \nu > -1/2, |\arg z| < \pi/2).$$

8.5. Деформируя контур интегрирования в интервале Ганкеля (4.20) для $H_{-\nu}^{(1)}(xz e^{i/2})$, получить интеграл Бесселя

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu+1/2) (2z)^\nu}{\pi^{1/2} x^\nu} \int_0^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2+z^2)^{\nu+(1/2)}},$$

где $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, $x > 0$, $|\arg z| < \pi/2$, а ветвь функции $(t^2+z^2)^{\nu+1/2}$ непрерывна и при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближается к главному значению $t^{2\nu+1}$.

8.6. Используя упр. 8.4 и интегральное представление бета-функции, доказать, что

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} K_\nu(t) dt = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu-1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) \quad (\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re} \nu|).$$

8.7. Пусть $\nu \geq 0$. Доказать, что если число $\nu - 1/2$ не является нечетным целым, то общее число нулей функции $K_\nu(z)$ в секторе $|\arg z| \leq \pi$ равно четному целому числу, ближайшему к $\nu - 1/2$. Для этого использовать формулу

$$K_\nu(te^{\pi i}) = e^{-\nu \pi i} \{ K_\nu(t) - \pi i e^{\nu \pi i} I_\nu(t) \},$$

которую можно получить из упр. 8.2, и применять принцип аргумента к замкнутому контуру, состоящему из:

1) дуг окружностей $z = Re^{i\theta}$ и $z = re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$), где R — велико, а r — мало; 2) отрезков прямых $\arg z = \pm \pi$, $r \leq |z| \leq R$ [Ватсон, 1949].

§ 9. Вырожденное гипергеометрическое уравнение

9.1. Уравнение Бесселя можно рассматривать как преобразованную форму частного случая *вырожденного гипергеометрического уравнения*

$$\vartheta(\vartheta + c - 1)w = z(\vartheta + a)w, \quad (9.04)$$

в котором a и c — параметры и, как и раньше, $\vartheta = z \frac{d}{dz}$. В свою

очередь уравнение (9.01) является частным случаем при $p = q = 1$ обобщенного гипергеометрического уравнения (11.02) из главы 5.

Уравнение (9.01) можно записать в виде

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0. \quad (9.02)$$

Это уравнение имеет регулярную особую точку в начале координат с показателями 0 и $1 - c$ и иррегулярную особую точку ранга 1 на бесконечности. Название *вырожденная* возникло следующим образом. Гипергеометрическая функция $F(a, b; c; \frac{z}{b})$ удовлетворяет уравнению

$$z \left(1 - \frac{z}{b}\right) \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(c - z - \frac{a+1}{b} z\right) \frac{dw}{dz} - aw = 0.$$

Оно имеет особые точки в 0, b и ∞ и сводится к (9.02) при $b \rightarrow \infty$. Таким образом, происходит вырождение двух регулярных особых точек, порождающее иррегулярную особую точку. Многие свойства решений уравнения (9.02) легко выводятся с помощью этого предельного перехода; см. упр. 9.2 и 9.4.

9.2. Если использовать обозначение § 11.1 главы 5, решение в виде ряда уравнения (9.02), соответствующее показателю 0 в точке $z = 0$, равно ${}_1F_1(a; c; z)$. Как функцию ${}_2F_1(a, b; c; z)$ обычно обозначают через $F(a, b; c; z)$, так и для ${}_1F_1(a; c; z)$ часто вводят более простые обозначения $M(a, c, z)$ или $\Phi(a, c; z)$.

Используя символ Похгаммера, имеем

$$M(a, c, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s}{(c)_s} \frac{z^s}{s!} \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (9.03)$$

Этот ряд сходится при всех конечных z и определяет функцию, известную под названием *функции Куммера*.

Как и в случае гипергеометрического уравнения, ограничения будут более слабыми, если в формулах использовать решения вида

$$M(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(c)} M(a, c, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s z^s}{\Gamma(c+s) s!}. \quad (9.04)$$

Мажорируя этот ряд, легко показать, что при фиксированном z функция $M(a, c, z)$ является целой по a и по c ; сравните § 9.2 главы 5. В то же время $M(a, c, z)$ является в общем случае мероморфной функцией переменной c с полюсами в точках $0, -1, -2, \dots$

Для второго показателя в $z = 0$ соответствующее решение имеет вид

$$N(a, c, z) \equiv z^{1-c} M(1 + a - c, 2 - c, z) \quad (c \neq 2, 3, 4, \dots). \quad (9.05)$$

Мы можем также положить

$$N(a, c, z) = \frac{N(a, c, z)}{\Gamma(2-c)} = z^{1-c} M(1 + a - c, 2 - c, z). \quad (9.06)$$

Формула (1.10) из главы 5 показывает, что вронсиан функций $M(a, c, z)$ и $N(a, c, z)$ равен постоянной, умноженной на $e^z z^{-c}$. Рассмотрение предельных форм этих решений и их производных в точке $z = 0$ дает

$$\mathscr{W}\{M(a, c, z), N(a, c, z)\} = \pi^{-1} \sin(\pi c) e^z z^{-c}.$$

Таким образом, $M(a, c, z)$ и $N(a, c, z)$ линейно независимы, исключая случаи, когда c — целое число или нуль.

9.3. Интегральное представление для $M(a, c, z)$ можно найти методом, использованным в § 9.4 главы 5 для $F(a, b; c; z)$; мы получим

$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt$$

$$(\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0), \quad (9.07)$$

причем дробные степени имеют главные значения.

Методом Похгаммера этот интеграл можно преобразовать в контурный интеграл, в котором с помощью аналитического продолжения устраняются все ограничения, наложенные на параметры; см. упр. 9.4.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Показать, что

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu e^{-iz}}{\Gamma(\nu+1)} M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2iz\right),$$

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)} M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right).$$

9.2. Доказать, что при фиксированных a, c и z гипергеометрический ряд для $F\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right)$ сходится равномерно относительно $b \in [2|z|, \infty)$. Вывести отсюда, что

$$M(a, c, z) = \lim_{b \rightarrow \infty} F\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right).$$

и далее из упр. 9.4 к главе 5, что

$$\begin{aligned}(c-z)M(a-1, c, z) + (2a-c+z)M(a, c, z) - aM(a+1, c, z) &= 0, \\ M(a, c-1, z) + (1-c-z)M(a, c, z) + (c-a)zM(a, c+1, z) &= 0.\end{aligned}$$

9.3. Преобразуя дифференциальное уравнение, получить второе ¹⁾ преобразование Куммера

$$M(a, 2a, 2z) = e^z {}_0F_1\left(a + \frac{1}{2}; \frac{1}{4}z^2\right) \quad (2a \neq 0, -1, -2, \dots)$$

9.4. Из упр. 9.2, а также из упр. 9.5 к главе 5 вывести, что

$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1+a-c)}{4\pi^2 e^{c\pi i}} \int_{\alpha}^{(1+, 0+, 1-, 0-)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt} dt,$$

где α — любая точка из интервала $(0, 1)$, а ветви t^{a-1} и $(1-t)^{c-a-1}$ непрерывны на контуре интегрирования и принимают в начальной точке главные значения.

§ 10. Асимптотические решения

вырожденного гипергеометрического уравнения

10.1. Теория, изложенная в § 2, непосредственно применима и к иррегулярной особой точке уравнения (9.02). Используя теоремы 2.1 и 2.2, мы находим, что существуют единственные решения $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ со свойствами

$$\begin{aligned}U(a, c, z) &\sim z^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(a)_s (1+a-c)_s}{s! z^s} \\ (z \rightarrow \infty \text{ в } |\arg z| \leq 3\pi/2 - \delta)\end{aligned} \quad (10.01)$$

и

$$\begin{aligned}V(a, c, z) &\sim e^z (-z)^{a-c} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c-a)_s (1-a)_s}{s! z^s} \\ (z \rightarrow \infty \text{ в } |\arg(-z)| \leq \pi/2 - \delta),\end{aligned} \quad (10.02)$$

где δ — произвольная малая положительная постоянная²⁾. При $z \rightarrow \infty$ в правой полуплоскости функция $U(a, c, z)$ является подчиненной, а $V(a, c, z)$ — доминирующей; в левой полуплоскости они меняются ролями. Таким образом, эти два решения линейно независимы при всех значениях параметров.

¹⁾ Первое преобразование Куммера будет введено в § 10.2.

²⁾ Используя обозначение обобщенной гипергеометрической функции, мы можем формально записать правую часть соотношения (10.01) как $z^{-a} {}_0F_1(a, 1+a-c; -z^{-1})$. Аналогично для $V(a, c, z)$. Другим обозначением, используемым для $U(a, c, z)$, является $\Psi(a, c, z)$.

Функции $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ связаны следующим образом. Производя в формуле (10.01) преобразование переменных, в результате которого правая часть (10.01) будет совпадать с правой частью (10.02), мы находим, что функция $e^z U(c - a, c, -z)$ удовлетворяет уравнению (9.02). Это решение является подчиненным при $z \rightarrow \infty$ и поэтому равно постоянной, умноженной на $V(a, c, z)$. Сравнение главных членов показывает, что эта постоянная равна единице; таким образом,

$$V(a, c, z) = e^z U(c - a, c, -z). \quad (10.03)$$

Интегральное представление для $U(a, c, z)$, аналогичное (9.07) имеет вид

$$U(a, c, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} e^{-zt} dt$$

$$\left(|\arg z| < \frac{1}{2}\pi, \operatorname{Re} a > 0 \right). \quad (10.04)$$

Эту формулу можно проверить, показав, что интеграл удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению, и затем сравнивая асимптотическую форму, которую можно получить из леммы Ватсона, с (10.01).

10.2. Преобразование, приводящее к (10.03), показывает также, что функция $e^z M(c - a, c, -z)$ удовлетворяет уравнению (9.02). При $\operatorname{Re} c > 1$ или $c = 1$ это решение является подчиненным в точке $z = 0$, и так как оно принимает значение $1/\Gamma(c)$ в этой точке, мы получаем

$$M(a, c, z) = e^z M(c - a, c, -z). \quad (10.05)$$

Аналитическое продолжение снимает все ограничения на параметры в этом результате, который известен под названием *преобразования Куммера*. Это преобразование можно также установить, умножая ряд (9.04) на степенной ряд для e^{-z} и используя теорему Вабдермонда.

Другим преобразованием, не изменяющим вырожденную гипергеометрическую функцию, является одновременная замена a и c на $1 + a - c$ и $2 - c$ и выбор новой зависимой переменной в виде $z^{1-c}u$; такой вывод можно сделать из (9.05). Сравнивая подчиненные решения в $z = +\infty$, мы получаем, что

$$U(a, c, z) = z^{1-c} U(1 + a - c, 2 - c, z). \quad (10.06)$$

10.3. Найдем коэффициенты A и B в формуле связи

$$M(a, c, z) = AU(a, c, z) + BV(a, c, z).$$

Поскольку $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ — многозначные функции z ,

значения этих коэффициентов зависят от того, какие ветви мы имеем в виду. Предположим, что $\arg z \in [0, \pi]$ и $\arg(-z) \in [-\pi, 0]$.

Налагая временно ограничение $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ и применяя метод Лапласа к (9.07), мы находим, что

$$M(a, c, z) \sim e^z z^{a-c} / \Gamma(a) \quad (z \rightarrow \infty, \arg z = 0) \quad (10.07)$$

и

$$M(a, c, z) \sim (-z)^{-a} / \Gamma(c-a) \quad (z \rightarrow \infty, \arg(-z) = 0). \quad (10.08)$$

Если $z \rightarrow \infty$ при $\arg z = 0$ или $\arg(-z) = -\pi$, то решение $U(a, c, z)$ — подчиненное, а $V(a, c, z)$ ведет себя асимптотически как $e^z z^{a-c} e^{-(a-c)\pi i}$ (ср. (10.02)). Сравнение с (10.07) дает

$$B = e^{(a-c)\pi i} / \Gamma(a).$$

Аналогично, если $z \rightarrow -\infty$ при $\arg z = \pi$ и $\arg(-z) = 0$, то решение $V(a, c, z)$ — подчиненное, а $U(a, c, z)$ ведет себя асимптотически как $(-z)^{-a} e^{-a\pi i}$. Поэтому

$$A = e^{a\pi i} / \Gamma(c-a).$$

Таким образом, один из вариантов искомой формулы связи имеет вид

$$M(a, c, z) = \frac{e^{a\pi i}}{\Gamma(c-a)} U(a, c, z) + \frac{e^{(c-a)\pi i}}{\Gamma(a)} V(a, c, z), \quad (10.09)$$

причем ветви определяются условием $\arg(-z) = -\pi$ при $\arg z = 0$ и далее по непрерывности.

Формула (10.09) установлена при ограничении $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$. Мы уже отмечали в § 9.2, что при фиксированном z функция $M(a, c, z)$ является целой по a и c . Из теоремы 3.1 следует, что то же самое верно относительно $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$, если z не равно нулю. Поэтому в силу аналитического продолжения формула (10.09) справедлива без ограничений на параметры.

Если же мы будем использовать непрерывную ветвь функции $V(a, c, z)$, определенную условием $\arg(-z) = \pi$ при $\arg z = 0$, то в силу симметрии формула связи примет вид

$$M(a, c, z) = \frac{e^{-a\pi i}}{\Gamma(c-a)} U(a, c, z) + \frac{e^{(c-a)\pi i}}{\Gamma(a)} V(a, c, z). \quad (10.10)$$

Важность формул (10.09) и (10.10) заключается в том, что при объединении с (10.01) и (10.02) они определяют асимптотическое поведение $M(a, c, z)$ при больших z в широкой области изменения $\arg z$, а именно в секторе $|\arg z| < (3\pi/2) - \delta$. В различных частях этого сектора одна из функций $U(a, c, z)$ и $V(a, c, z)$ экспоненциально мала по сравнению с другой и поэтому ею можно пренебречь в смысле Пуанкаре (хотя, как мы увидим в § 13, такой акт может привести к потере точности в чис-

ленных расчетах). В других областях, в особенности вблизи прямых $\arg z = \pm \pi/2$, вклады от $U(a, z, c)$ и $V(a, c, z)$ одинаково существенны¹⁾.

10.4. Другая важная формула связывает U , M и N :

$$U(a, c, z) = CM(a, c, z) + DN(a, c, z). \quad \text{[(10.11)]}$$

Чтобы найти C и D , мы положим сначала $z \rightarrow +\infty$. Тогда, используя (10.09) и (9.06), имеем

$$M(a, c, z) \sim e^z z^{a-c}/\Gamma(a), \quad N(a, c, z) \sim e^z z^{a-c}/\Gamma(1+a-c),$$

если ни одно из чисел a и $1+a-c$ не равно целому отрицательному числу или нулю. Поскольку функция $U(a, c, z)$ является при данных условиях подчиненной, отсюда следует, что

$$C/\Gamma(a) = -D/\Gamma(1+a-c).$$

Далее, предположим, что $\operatorname{Re} a > 0$ и $\operatorname{Re} c < 1$. Полагая $z \rightarrow 0$ в (10.04), мы получаем

$$U(a, c, +0) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)};$$

сравните упр. 1.3 к главе 2. В правой части равенства (10.11) функция $N(a, c, z)$ при $z \rightarrow 0$ стремится к нулю, а $M(a, c, z)$ стремится к $1/\Gamma(c)$. Следовательно,

$$C = \frac{\Gamma(c) \Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}, \quad D = -\frac{\Gamma(c) \Gamma(1-c)}{\Gamma(a)},$$

и равенство (10.11) принимает вид

$$U(a, c, z) = \frac{\pi}{\sin(\pi c)} \left\{ \frac{M(a, c, z)}{\Gamma(1+a-c)} - \frac{N(a, c, z)}{\Gamma(a)} \right\}. \quad (10.12)$$

Как и в § 10.3, аналитическое продолжение устраняет все ограничения, наложенные на параметры.

Объединенная с равенствами (9.04) и (9.06), эта формула описывает поведение $U(a, c, z)$ около точки $z = 0$. Если n — целое число или нуль, правая часть формулы заменяется ее предельным значением; см. ниже упр. 10.6.

10.5. Определитель Вронского для U и M можно найти, рассмотрев предельный вид этих функций и их производных при $z \rightarrow \infty$ или при $z \rightarrow 0$. Любой путь дает формулу

$$\mathscr{W}\{U(a, c, z), M(a, c, z)\} = e^z z^{-c}/\Gamma(a).$$

¹⁾ Много асимптотической информации, содержащейся в (10.09) и (10.10), можно также получить из (9.07) с помощью методов Лапласа и стационарной фазы. Вклады от концевых точек области интегрирования должны быть учтены; ограничения $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ можно снять, используя метод § 5.2 главы 4.

Поэтому если a не является неположительным целым числом, то эти решения линейно независимы. Их относительные свойства подчиненности при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow 0$ показывают, что если $\operatorname{Re} c \geq 1$, то функции $U(a, c, z)$ и $M(a, c, z)$ образуют численно удовлетворительную пару решений во *всем* секторе $|\arg z| \leq \pi/2$.

Если $a = 0, -1, -2, \dots$ и $\operatorname{Re} c > 1$ или $c = 1$, то решение уравнения (9.02), подчиненное в начале координат, является подчиненным и на бесконечности в секторе $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$; в действительности оно представляет собой многочлен по z степени $-a$; см. ниже упр. 10.3. Как отмечено в § 7.3 главы 5, комбинация этого решения с линейно независимым решением, например с $V(a, c, z)$, дает численно удовлетворительную пару решений в секторе $|\arg z| \leq \pi/2$.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Показать, что

$$K_\nu(z) = \pi^{1/2} (2z)^\nu e^{-z} U(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2z).$$

10.2. Показать, что неполная гамма-функция может быть представлена в виде

$$\gamma(\alpha, z) = \frac{z^\alpha}{\alpha} M(\alpha, \alpha + 1, -z) \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots);$$

$$\Gamma(\alpha, z) = e^{-z} U(1 - \alpha, 1 - \alpha, z).$$

10.3. Показать, что многочлены Латерра и Эрмита можно записать в виде

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n)}{n!} M(-n, \alpha + 1, x) = \frac{(-1)^n}{n!} U(-n, \alpha + 1, x),$$

$$H_n(x) = 2^n U\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, x^2\right) = 2^n x U\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

10.4. Показать, что функция параболического цилиндра (глава 6, § 6) представляется в виде

$$\begin{aligned} U(a, z) &= 2^{-\frac{a}{2} - \frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{4}z^2\right) U\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z^2\right) \\ &= 2^{-\frac{a}{2} - \frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{1}{4}z^2\right) z U\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}z^2\right). \end{aligned}$$

10.5. Проверить, что

$$\begin{aligned} U(a-1, c, z) + (c-2a-z)U(a, c, z) + a(1+a-c)U(a+1, c, z) &= 0, \\ (c-a-1)U(a, c-1, z) + (1-c-z)U(a, c, z) + zU(a, c+1, z) &= 0. \end{aligned}$$

10.6. Пусть m — положительное целое число. Рассматривая предельную форму равенства (10.12), показать, что

$$U(a, m, z) = \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{s-1} \lambda_{m,-s} \frac{(s-1)!}{z^s} + \lambda_{m,0} M(a, m, z) \ln z + \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{m,s} \mu_{m,s} \frac{z^s}{s!},$$

где

$$\lambda_{m,s} = \frac{(-1)^m \Gamma(a-1-s)}{\Gamma(a) \Gamma(1-a-m) (m-1-s)!}, \quad \mu_{m,s} = \Psi(a+s) - \Psi(1+s) - \Psi(m+s).$$

§ 11. Функции Уиттекера

11.1. Если в вырожденном гипергеометрическом уравнении (9.02) сделать замену зависимой переменной, приводящую к исключению члена с первой производной, то мы получим уравнение вида

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{z} + \frac{m^2 - 1/4}{z^2} \right) W, \quad (11.01)$$

в котором $k = \frac{1}{2}c - a$, $m = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}$, $W = e^{-z/2} z^{m+1/2} w$. Оно называется *уравнением Уиттекера*. Стандартные решения имеют вид

$$M_{k,m}(z) \equiv e^{-z/2} z^{m+(1/2)} M\left(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right), \quad (11.02)$$

$$W_{k,m}(z) \equiv e^{-z/2} z^{m+(1/2)} U\left(m - k + \frac{1}{2}, 2m + 1, z\right). \quad (11.03)$$

Каждое из выражений является многозначной функцией z . Главные ветви соответствуют области $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Все формулы из §§ 9 и 10 можно выразить в терминах функций Уиттекера. В частности, асимптотические свойства имеют вид

$$M_{k,m}(z) \sim z^{m+(1/2)} \quad (z \rightarrow 0, 2m \neq -1, -2, -3, \dots), \quad (11.04)$$

$$W_{k,m}(z) \sim e^{-z/2} z^k \quad (z \rightarrow \infty, |\arg z| \leq (3\pi/2) - \delta). \quad (11.05)$$

11.2. В качестве примера применения теории, изложенной в главе 6, можно определить поведение функций $M_{k,m}(z)$ и $W_{k,m}(z)$ при больших m . Мы приведем план рассуждений в случае, когда параметры и переменные действительны и положительны.

После подстановок $x = z/m$ и $l = k/m$ уравнение (11.01) принимает вид

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \{f(x) + g(x)\} W, \quad (11.06)$$

где

$$f(x) = m^2 \frac{x^2 - 4lx + 4}{4x^2}, \quad g(x) = -\frac{1}{4x^2}. \quad (11.07)$$

Нули $f(x)$ находятся в точках $x = 2l \pm 2(l^2 - 1)^{1/2}$. Если $l \in [0, \alpha]$, где α — фиксированное число из интервала $[0, 1]$, то эти нули комплексны, и функция $f(x)$ положительна всюду в $(0, \infty)$.

В силу этого к (11.06) можно применить теорему 2.1 из главы 6 при $a_1 = 0$ и $a_2 = \infty$. Из §§ 4.2 и 4.3 той же главы — или непосредственно — видно, что функция контроля ошибки F , построенная на основе функций (11.07), имеет вариацию, сходящуюся при $x = \infty$ и 0, т. е. величина

$$\mathcal{V}_{0,\infty}(F) \equiv \frac{1}{m} \int_0^\infty \left| \frac{(2x)^{1/2}}{(x^2 - 4lx + 4)^{1/4}} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{(2x)^{1/2}}{(x^2 - 4lx + 4)^{1/4}} \right\} + \frac{1}{2x(x^2 - 4lx + 4)^{1/2}} \right| dx$$

конечна. Кроме того, легко видеть, что

$$\mathcal{V}_{0,\infty}(F) = m^{-1} O(1), \quad (11.08)$$

равномерно относительно $l \in [0, \alpha]$.

Упомянутая выше теорема утверждает, кроме того, что существуют такие решения $w_1(x)$ и $w_2(x)$ уравнения (11.06), для которых

$$w_1(x) = f^{-1/4}(x) \exp \left\{ \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_1(x)\}, \quad (11.09)$$

$$w_2(x) = f^{-1/4}(x) \exp \left\{ - \int f^{1/2}(x) dx \right\} \{1 + \varepsilon_2(x)\}, \quad (11.10)$$

где

$$|\varepsilon_1(x)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{V}_{0,x}(F) \right\} - 1, \quad |\varepsilon_2(x)| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{V}_{x,\infty}(F) \right\} - 1.$$

Первое решение является подчиненным в $x=0$; второе — в $x=\infty$. Поэтому

$$\frac{M_{k,m}(z)}{w_1(x)} = A(k, m), \quad \frac{W_{k,m}(z)}{w_2(x)} = B(k, m),$$

где $A(k, m)$ и $B(k, m)$ не зависят от x (или от z).

Значение $A(k, m)$ можно найти, положив $x \rightarrow 0$ и используя (11.04), (11.09), а также соотношение $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$. Аналогично можно найти $B(k, m)$, положив $x \rightarrow \infty$ и используя (11.05), (11.10) и соотношение $\varepsilon_2(x) \rightarrow 0$. Эти вычисления основываются на элементарном тождестве

$$\int f^{1/2}(x) dx = \frac{1}{2} Z - k \ln(Z + z - 2k) - m \ln \frac{mZ - kz + 2m^2}{\dots},$$

в котором

$$Z = (z^2 - 4kz + 4m^2)^{1/2}.$$

Конечный результат имеет вид

$$M_{h,m}(z) = \frac{2^{h+2m+(1/2)} m^{2m+(1/2)} (m-k)^h z^{m+(1/2)} e^{Z/2}}{e^m Z^{1/2} (Z+z-2k)^h (mZ-kz+2m^2)^m} (1+\varepsilon_1)$$

и

$$W_{h,m}(z) = \frac{(Z+z-2k)^h (mZ-kz+2m^2)^m}{(m-k)^m (2e)^h z^{m-(1/2)} Z^{1/2} e^{Z/2}} (1+\varepsilon_2).$$

Остаточные члены имеют следующие свойства: 1) если k и m фиксированы, то $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$; 2) если m велико, то $\varepsilon_1 = O(m^{-1})$ и $\varepsilon_2 = O(m^{-1})$ равномерно относительно $z \in (0, \infty)$ и $k \in [0, \alpha m]$, где α — любое фиксированное число из $[0, 1)$.

Следует отметить, что условие 2) включает случай, когда k фиксировано. При этом происходят некоторые упрощения.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Вывести из (10.12) формулу

$$W_{h,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{h,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{h,-m}(z),$$

при этом, если $2m$ — целое число или нуль, то правую часть следует заменить ее предельным значением.

11.2. Показать, что $M_{-h,m}(ze^{\pi i}) = ie^{m\pi i} M_{h,m}(z)$. Далее, используя предыдущее упражнение, доказать, что при любом целом s

$$\begin{aligned} (-1)^s W_{h,m}(ze^{2s\pi i}) &= - \frac{e^{2h\pi i} \sin(2sm\pi) + \sin\{(2s-2)m\pi\}}{\sin(2m\pi)} W_{h,m}(z) - \\ &- \frac{\sin(2sm\pi)}{\sin(2m\pi)} \frac{2\pi i e^{h\pi i}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} W_{-h,m}(ze^{\pi i}). \end{aligned}$$

§ 12*. Оценки остаточного члена

для асимптотических решений в общем случае

12.1. Метод доказательства, использованный для теорем 2.1 и 2.2, является недостаточно эффективным для того, чтобы дать удовлетворительные оценки для n -го остаточного члена асимптотического разложения (2.04), особенно когда n не подчиняется условию (2.14). Чтобы получить более точные оценки, мы построим для остаточного члена интегральное уравнение, используя дополнительные функции, которые приближают искомые решения лучше, чем $e^{\lambda_1 z}$ и $e^{\lambda_2 z}$. В то же самое время мы ослабим условия на $f(z)$ и $g(z)$.

Функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области, содержащей сектор S : $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, $|z| \geq a$ и

$$f(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } S), \quad (12.01)$$

где $f_0 \neq \lambda g_0$. Остаточные члены разложений определяются формулами

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} + \frac{F_n(z)}{z^n}, \\ g(z) &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{g_s}{z^s} + \frac{G_n(z)}{z^n} \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (12.02)$$

Таким образом, при фиксированном n величины $|F_n(z)|$ и $|G_n(z)|$ ограничены в S .

Этапы доказательства аналогичны проведенным в теореме 2.1, и поэтому мы будем использовать те же самые обозначения.

12.2. Используя тождество

$$g(z) L_n(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ g_0 + \frac{g_1}{z} + \dots + \frac{g_{n-s-1}}{z^{n-s+1}} + \frac{G_{n-s+2}(z)}{z^{n-s+2}} \right\} \frac{a_{s+1}}{z^s},$$

и аналогичное тождество для $f(z) L_n'(z)$, мы можем проверить, что выражение $R_n(z)$ из формулы (2.06) имеет вид

$$R_n(z) = \frac{(f_0 + 2\lambda_1) n a_{n+1}}{z^{n+1}} + \frac{\hat{R}_{n+1}(z)}{z^{n+2}}, \quad (12.03)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{R}_{n+1}(z) &= \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} a_{s+1} \{ (\mu_1 - s) F_{n+1-s}(z) + \lambda_1 F_{n+2-s}(z) + G_{n+2-s}(z) \}, \end{aligned} \quad (12.04)$$

причем $R_n(z)$ ограничено в S .

Чтобы построить новое интегральное уравнение, эквивалентное (2.07), мы найдем сначала дифференциальное уравнение, которое аппроксимирует данное уравнение

$$w'' + f(z)w' + g(z)w = 0 \quad (12.05)$$

точнее, чем

$$w'' + f_0 w' + g_0 w = 0,$$

когда значение $|z|$ велико. Наиболее очевидным выбором является

уравнение

$$w'' + \left(f_0 + \frac{f_1}{z}\right) w' + \left(g_0 + \frac{g_1}{z}\right) w = 0,$$

но его в общем случае нельзя решить в элементарных функциях.

Мы применим результат упражнения 1.2 из главы 6, определяющий функции p и q таким образом, чтобы разложения коэффициентов перед dW/dz и W по степеням z^{-1} согласовались с разложениями $f(z)$ и $g(z)$ до члена с z^{-1} . Очевидно, что этот выбор не единствен; для простоты мы возьмем

$$q = f_0 + \frac{f_1}{z}, \quad p = \frac{1}{2} \frac{dq}{dz} + \frac{1}{4} q^2 - g_0 - \frac{g_1}{z} + \frac{\text{const}}{z^2},$$

выбирая постоянную во втором соотношении так, чтобы сделать p полным квадратом. Тогда

$$p = \frac{1}{4} (f_0^2 - 4g_0) \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^2,$$

где

$$\rho = \frac{f_0 f_1 - 2g_1}{f_0^2 - 4g_0} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (12.06)$$

сравните (1.09) и (1.10). При таких заменах функции

$$W_1(z) = \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^{-1/2} e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1}, \quad W_2(z) = \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^{-1/2} e^{\lambda_2 z} z^{\mu_2} \quad (12.07)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(f_0 + \frac{f_1}{z}\right) \frac{dW}{dz} + \left\{g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{\hat{g}_2}{z^2} + l(z)\right\} W = 0, \quad (12.08)$$

в котором

$$\hat{g}_2 = \frac{1}{4} f_1 (f_1 - 2) - \rho^2 \left(\frac{1}{4} f_0^2 - g_0\right) = \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \quad (12.09)$$

и

$$l(z) = -\rho^{1/2} (p^{-1/4})'' = \frac{\rho}{z^3} \left(1 + \frac{\rho}{4z}\right) \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^{-2}.$$

Очевидно, что (12.08) дает искомое уравнение, соответствующее (12.05).

Используя (12.02) при $n = 2$, мы запишем уравнение (2.07) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_n''(z) + \left(f_0 + \frac{f_1}{z}\right) \varepsilon_n'(z) + \left\{g_0 + \frac{g_1}{z} + \frac{\hat{g}_2}{z^2} + l(z)\right\} \varepsilon_n(z) = \\ = -e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} R_n(z) - \frac{\hat{G}_2(z)}{z^2} \varepsilon_n(z) - \frac{F_2(z)}{z^2} \varepsilon_n'(z), \end{aligned} \quad (12.10)$$

где

$$\widehat{G}_2(z) = G_2(z) - \widehat{g}_2 - z^2 l(z). \quad (12.11)$$

Решение уравнения (12.10) с помощью вариации параметров даст искомое интегральное уравнение

$$\varepsilon_n(z) = \int_z^{z_1} K(z, t) \left\{ e^{\lambda_1 t} t^{\mu_1} R_n(t) + \frac{\widehat{G}_2(t)}{t^2} \varepsilon_n(t) + \frac{F_2(t)}{t^2} \varepsilon'_n(t) \right\} dt, \quad (12.12)$$

в котором

$$K(z, t) = - \frac{W_1(z) W_2(t) - W_2(z) W_1(t)}{W_1(t) W_2'(t) - W_2(t) W_1'(t)} = \frac{W_1(z) W_2(t) - W_2(z) W_1(t)}{(\lambda_1 - \lambda_2) t^{\mu_1 + \mu_2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}}, \quad (12.13)$$

а z_1 — произвольная фиксированная точка из S ; в качестве z_1 обычно выбирают бесконечно удаленную точку на луче $\arg t = -\omega$ (ср. (2.12)).

12.3. Мы будем решать уравнение (12.12) с помощью теоремы 10.1 из главы 6. Чтобы найти оценку ядра, введем сначала обозначения

$$\xi_1(z) = \lambda_1 z + \mu_1 \ln z, \quad \xi_2(z) = \lambda_2 z + \mu_2 \ln z,$$

причем ветвь $\ln z$ выбирается непрерывной на контуре интегрирования \mathcal{P}_1 . Тогда из (12.07) и (12.13) следует, что

$$K(z, t) = \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\rho}{t}\right)^{-1/2} \frac{e^{\xi_1(z) - \xi_1(t)} - e^{\xi_2(z) - \xi_2(t)}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Пусть \mathcal{P}_1 удовлетворяет условию, что $\operatorname{Re} \{\xi_2(t) - \xi_1(t)\}$ не убывает, когда t изменяется от z до z_1 . Тогда

$$|e^{\xi_2(z) - \xi_2(t)}| \leq |e^{\xi_1(z) - \xi_1(t)}|,$$

и поэтому $|K(z, t)| \leq P_0(z) Q(t)$, где

$$Q(t) = |e^{-\xi_1(t)}|, \quad P_0(z) = 2c_1 \left| \frac{e^{\xi_1(z)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|, \\ c_1 = \sup_{t \in \mathcal{P}_1} \left| 1 + \frac{\rho}{t} \right|^{-1}. \quad (12.14)$$

Далее,

$$\frac{W_j'(z)}{W_j(z)} = \lambda_j + \frac{\mu_j}{z} + \frac{\rho}{2z^2} \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)^{-1} \quad (j = 1, 2);$$

отсюда $\left| \frac{\partial K(z, t)}{\partial z} \right| \leq P_1(z) Q(t)$, где $P_1(z) = c_2 P_0(z)$ и

$$c_2 = \frac{1}{2} \sup_{t \in \mathcal{P}_1} \left\{ \left| \lambda_1 + \frac{\mu_1}{t} + \frac{\rho}{2t^2} \left(1 + \frac{\rho}{t} \right)^{-1} \right| + \right. \\ \left. + \left| \lambda_2 + \frac{\mu_2}{t} + \frac{\rho}{2t^2} \left(1 + \frac{\rho}{t} \right)^{-1} \right| \right\}. \quad (12.15)$$

Воспользуемся снова обозначениями теоремы 10.1 главы 6:

$$\varphi(t) = -R_n(t), \quad J(t) = e^{\tilde{z}_1(t)}, \\ \psi_0(t) = -t^{-2} \widehat{G}_2(t), \quad \psi_1(t) = -t^{-2} F_2(t).$$

Таким образом, в условиях (6) § 10.2 главы 6 имеем

$$\Phi(z) = \int_z^{z_1} |R_n(t)| dt, \quad \Psi_0(z) = \int_z^{z_1} \left| \frac{\widehat{G}_2(t)}{t^2} \right| dt, \\ \Psi_1(z) = \int_z^{z_1} \left| \frac{F_2(t)}{t^2} \right| dt$$

и

$$k = 1, \quad k_0 = 2c_1 |\lambda_1 - \lambda_2|^{-1}, \quad k_1 = 2c_1 c_2 |\lambda_1 - \lambda_2|^{-1}.$$

Очевидно, что

$$\Psi_0(z) \leq c_3 \mathcal{Y}_{z, z_1}(t^{-1}), \quad \Psi_1(z) \leq c_4 \mathcal{Y}_{z, z_1}(t^{-1}),$$

где

$$c_3 = \sup_{t \in \mathcal{P}_1} |\widehat{G}_2(t)|, \quad c_4 = \sup_{t \in \mathcal{P}_1} |F_2(t)|. \quad (12.16)$$

Используя формулы (12.03) и (12.04) и вспоминая, что $f_0 + 2\lambda_1 = = \lambda_1 - \lambda_2$, мы приходим к неравенству

$$\Phi(z) \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \{ \mathcal{Y}_{z, z_1}(a_{n,1} t^{-n}) + \mathcal{Y}_{z, z_1}(r_{n+1,1} t^{-n-1}) \},$$

где

$$r_{n+1,1} = \\ = \frac{\sup_{t \in \mathcal{P}_1} \left| \sum_{s=0}^{n-1} a_{s,1} \{ (\mu_1 - s) F_{n+1-s}(t) + \lambda_1 F_{n+2-s}(t) + G_{n+2-s}(t) \} \right|}{(n+1) |\lambda_1 - \lambda_2|}. \quad (12.17)$$

Применяя указанную выше теорему, мы получаем решение интегрального уравнения (12.12) вдоль выбранного пути \mathcal{P}_1 вместе с оценками. То, что это решение также удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.07), можно установить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в § 11.2 главы 6.

12.4. Собирая вместе предыдущие результаты, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 12.1. При набранных курсивом условиях в § 12.1 уравнение (12.05) для каждого целого $n > 0$ имеет решение

$$w_{n,1}(z) = e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_{s,1}}{z^s} \right) + \varepsilon_{n,1}(z), \quad (12.18)$$

зависящее от произвольно выбираемой точки z_1 и голоморфное в S . Значения λ_1 , μ_1 , $a_{s,1}$ определены в § 1.2, а остаточный член $\varepsilon_{n,1}(z)$ оценивается следующим образом. Пусть $Z_1(z_1)$ — множество точек z , для которых существует путь \mathcal{P}_1 в S , соединяющий z с z_1 и имеющий следующие свойства:

- 1) \mathcal{P}_1 состоит из конечной цепочки R_2 -дуг.
- 2) $\operatorname{Re} \{(\lambda_2 - \lambda_1)t + (\mu_2 - \mu_1) \ln t\}$ не убывает, когда t изменяется вдоль \mathcal{P}_1 от z до z_1 .

Тогда в $Z_1(z_1)$ величины $|\varepsilon_{n,1}(z)|$ и $|\varepsilon'_{n,1}(z)|/c_2$ ограничены выражением

$$2c_1 |e^{\lambda_1 z} z^{\mu_1}| \left\{ \mathcal{Y}_{\mathcal{P}_1} \left(\frac{a_{n,1}}{t^n} \right) + \mathcal{Y}_{\mathcal{P}_1} \left(\frac{r_{n+1,1}}{t^{n+1}} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2c_1 (c_2 c_4 - c_3)}{|\lambda_1 - \lambda_2|} \mathcal{Y}_{\mathcal{P}_1} \left(\frac{1}{t} \right) \right\}, \quad (12.19)$$

где $r_{n+1,1}$ определяется формулой (12.17), c_1 , c_2 и c_4 заданы равенствами (12.14)–(12.16), ρ задано формулой (12.06) и

$$c_3 = \sup_{t \in \mathcal{P}_1} |G_2(t) - \mu_1 \mu_2 - \\ - \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) - \frac{\rho}{t} \left(1 + \frac{\rho}{4t} \right) \left(1 - \frac{\rho}{t} \right)^{-2}|. \quad (12.20)$$

Замечания. (а) Условия 1) и 2) на \mathcal{P}_1 аналогичны условиям, сформулированным в § 11.3 главы 6. В приведенной выше теореме допустимый путь снова можно было назвать *поступательным путем*. Если z_1 — бесконечно удаленная точка на поступательном пути \mathcal{P}_1 (что обычно и будет иметь место), то требуется, чтобы \mathcal{P}_1 совпадал с \mathcal{L}_1 в окрестности z_1 .

(б) Аналогичный результат справедлив для второго решения дифференциального уравнения: по существу, мы должны поменять местами λ_1 и λ_2 , μ_1 и μ_2 , заменить $a_{s,1}$ на $a_{s,2}$ и ввести новые точку z_2 и путь \mathcal{P}_2 .

(с) Аналогичная теорема справедлива для действительных переменных. В этом случае достаточно, чтобы $f(z)$ и $g(z)$ были непрерывными функциями. Кроме того, оценку (12.19) можно уточнить, заменяя c_1 и c_2 одновременно на $\frac{1}{2}c_1$ и $2c_2$ соответственно.

12.5. В следующем параграфе теорема 12.1 будет применена к разложениям Ганкеля. В этом случае $\mu_1 = \mu_2$, что значительно упрощает выбор поступательных путей. Исследование более сложного случая функций Уиттекера при больших значениях аргумента было проведено Олвером (1965).

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Доказать, что условие (2) на \mathcal{P}_1 удовлетворяется, если $\cos \varphi \geq |\rho/t|$, где $\varphi = \arg(\lambda_2 - \lambda_1)$ — угол наклона касательной к \mathcal{P}_1 в точке t .

12.2. Показать с помощью предыдущего упражнения, что теоремы 2.1 и 2.2 являются частными случаями теоремы 12.1.

12.3. Используя упр. 12.1, показать, что уравнение

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{z}{z-1} \frac{dw}{dz} + e^{-z} w = 0$$

имеет аналитическое решение с асимптотическим разложением

$$\frac{e^{-z}}{z} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{j!} \right\} \frac{(-1)^s s!}{z^s}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq (\pi/2) - \delta$ ($\delta < \pi/2$).

§ 13*. Оценки остаточного члена для разложений Ганкеля

13.1. Оценки остаточных членов в усеченных рядах (4.03) и (4.04) можно получить из теоремы 12.1. Положим при $n \geq 1$

$$H_v^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} e^{i\zeta} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} i^s \frac{A_s(v)}{z^s} + \eta_{n,1}(z) \right\}, \quad (13.01)$$

где снова $\zeta = z - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi$. В обозначениях § 12

$$F_s(z) = 0 \quad (s \geq 2);$$

$$G_2(z) = -v^2, \quad G_s(z) = 0 \quad (s \geq 3)$$

и

$$\rho = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_3 = |v^2 - 1/4|, \quad c_4 = 0,$$

$$r_{n+1,1} = 0 \quad (n \geq 0).$$

Полагая $z_1 = i\infty$ и вспоминая, что $\eta_{n,1}(z) = e^{-iz^{1/2}} e_{n,1}(z)$, мы выводим из (12.19) оценку

$$|\eta_{n,1}(z)| \leq 2|A_n(v)| \mathcal{V}_{z,i\infty}(t^{-n}) \exp\{|v^2 - 1/4| \mathcal{V}_{z,i\infty}(t^{-1})\}, \quad (13.02)$$

причем пути в вариации подчинены условию, что $\operatorname{Im} t$ изменяется монотонно.

Оценки для минимальных вариаций можно получить из § 13 главы 6, повернув плоскость переменной z на угол $\pi/2$. Тогда

$$\mathcal{V}_{z, i\infty}(t^{-n}) \leq \begin{cases} |z|^{-n} & (0 \leq \arg z \leq \pi), \\ \chi(n) |z|^{-n} & \left(-\frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq 0 \text{ или } \pi \leq \arg z \leq \frac{3}{2}\pi\right) \\ 2\chi(n) |\operatorname{Im} z|^{-n} & \left(-\pi < \arg z \leq -\frac{1}{2}\pi \text{ или } \frac{3}{2}\pi \leq \arg z < 2\pi\right) \end{cases}, \quad (13.03)$$

где снова $\chi(n) = \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)$.

Если $|z| \gg |v^2 - 1/4|$ и $0 \leq \arg z \leq \pi$, то отношение оценки остаточного члена (13.02) к абсолютной величине первого отброшенного члена $i^n A_n(v)/z^n$ приблизительно равно 2. Если $\pi/2 \leq |\arg(ze^{-\pi i/2})| \leq \pi$, то это отношение приблизительно равно $2\chi(n)$. В силу этого формула (13.01) является весьма удовлетворительной для численных расчетов в этих областях изменения аргумента. Но когда $\pi \leq |\arg(ze^{-\pi i/2})| \leq (3\pi/2) - \delta$, мы имеем

$$\mathcal{V}_{z, i\infty}(t^{-n}) \leq 2\chi(n) \operatorname{cosec} \pi \delta |z|^{-n}.$$

Эта оценка сильно растет при $\delta \rightarrow 0$, предупреждая нас о том, что если пренебречь значением $\eta_{n,1}(z)$, то формула (13.01) становится неточной при вычислениях вблизи границ $\arg z = -\pi$ и 2π .

Для второй функции Ганкеля соответствующий результат имеет вид

$$H_v^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\pi} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-i)^s \frac{A_s(v)}{z^s} + \eta_{n,2}(z) \right\}, \quad (13.04)$$

где

$$|\eta_{n,2}(z)| \leq 2 |A_n(v)| \mathcal{V}_{z, -i\infty}(t^{-n}) \exp \left\{ \left| v^2 - \frac{1}{4} \right| \mathcal{V}_{z, -i\infty}(t^{-1}) \right\}. \quad (13.05)$$

Оценки (13.03) применимы к $\mathcal{V}_{z, -i\infty}(t^{-n})$ в сопряженных секторах.

Оценки остаточного члена для соответствующих разложений $J_v(z)$ и $Y_v(z)$ легко выводятся из (13.02), (13.03) и (13.05) на основании формул связи (4.08) и (5.01).

13.2. Удовлетворительные асимптотические представления для $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ около границ областей справедливости разложений (4.03) и (4.04) можно построить с помощью формул продолжения (4.13) и (4.14) методом § 4.3. Полагая в (4.13)

$m = 1$ и 2 , мы получаем

$$H_v^{(1)}(ze^{2\pi i}) = -H_v^{(1)}(z) + 2 \cos(v\pi) H_v^{(1)}(ze^{\pi i}).$$

Если $\arg z \in (-\pi, \pi)$, то z и $ze^{\pi i}$ лежат внутри области справедливости разложений (13.01) и (13.03). Подставляя в эту формулу разложения для $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(1)}(ze^{\pi i})$ и заменяя затем z на $ze^{-2\pi i}$, мы получаем разложение

$$H_v^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\pi} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} i^s \frac{A_s(v)}{z^s} + \eta_{n,1}(ze^{-2\pi i}) \right\} + \\ + (1 + e^{-2v\pi i}) \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\pi} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-i)^s \frac{A_s(v)}{z^s} + \eta_{n,1}(ze^{-\pi i}) \right\}, \quad (13.06)$$

справедливое при $\pi < \arg z < 3\pi$. Это выражение является полной формой формулы (4.16).

При $\pi < \arg z < 2\pi$ имеются два различных представления (13.01) и (13.06) для $H_v^{(1)}(z)$; мы отмечали в § 4.3, что они эквивалентны в смысле Пуанкаре. В секторе $3\pi/2 < \arg z < 2\pi$ оценки (13.02) для остатка в (13.06) зависят от первых двух строк в (13.03); соответствующая оценка для (13.01) зависит от последней строки и поэтому она больше. Аналогичным образом оценка остаточного члена для (13.01) меньше, чем объединенная оценка для (13.06) при $\pi < \arg z < 3\pi/2$.

Мы можем установить этот результат следующим образом. Пусть $|z|$ имеет заданное большое значение, а n фиксировано. Когда $\arg z$ непрерывно возрастает от $\pi/2$, правая часть разложения (13.01) без учета остаточного члена дает хорошее приближение для $H_v^{(1)}(z)$ вплоть до $\arg z = 3\pi/2$, включая и это значение. Чтобы добиться сравнительной численной точности в случае $3\pi/2 < \arg z < 2\pi$, необходимо добавить к этому приближению второй ряд, стоящий справа в (13.06), хотя в этой области функция e^{-iz} экспоненциально мала по сравнению с e^{iz} и ею можно пренебречь в смысле Пуанкаре. Когда значение $\arg z = 2\pi$ пройдено, функция e^{-iz} становится больше по сравнению с e^{iz} , что заставляет ряды в (13.06) поменяться ролями; учет второго ряда обязателен, а первый нельзя отбросить без некоторой потери точности. За значением $\arg z = 5\pi/2$ оценка остатка для $\eta_{n,1}(ze^{-\pi i})$ в (13.06) становится большой, и чтобы сохранить точность, необходимо использовать новое кратное первого ряда (получаемое из (4.13) при $m = 3$). И так далее. Таким образом можно вычислить $H_v^{(1)}$ для всех значений $\arg z$ посредством одного или двух применений формулы (13.01), где $\arg z$ изменяется в численно допустимой области $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Аналогично для $H_v^{(2)}(z)$.

13.3. Другой путь получения оценок для остаточных членов в разложениях Ганкеля, особенно удобный, когда переменные действительны, состоит в применении методов глав 3 и 4 к интегралам Ганкеля¹⁾.

Допустим, что $\nu > -1/2$ и $z > 0$. Тогда путь в (4.20) можно сжать в контур, состоящий из двух сторон линии, которая соединяет 1 и $1+i\infty$. Выбирая $\tau = (t-1)/i$ в качестве новой переменной интегрирования и используя формулу отражения для гамма-функции, мы приходим к представлению

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-i\tau} \tau^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} i\tau\right)^{\nu-1/2} d\tau, \quad (13.07)$$

где множители под знаком интеграла имеют главные значения. Для любого положительного целого числа n формула Тейлора, полученная повторным интегрированием по частям, имеет вид

$$\left(1 + \frac{1}{2} i\tau\right)^{\nu-(1/2)} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{\nu-1/2}{s} \left(\frac{1}{2} i\tau\right)^s + \Phi_n(\tau), \quad (13.08)$$

где

$$\Phi_n(\tau) = \binom{\nu-1/2}{n} \left(\frac{1}{2} i\tau\right)^n \int_0^1 (1-v)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} iv\tau\right)^{\nu-n-(1/2)} dv.$$

Подстановка суммы из правой части (13.08) в (13.07) дает первые n членов разложения (13.01). Чтобы рассмотреть остаточный член, положим $n \geq \nu - 1/2$. Тогда $\left|\left(1 + \frac{1}{2} iv\tau\right)^{\nu-n-(1/2)}\right| \leq 1$. Следовательно,

$$|\Phi_n(\tau)| \leq \left|\binom{\nu-1/2}{n}\right| \left|\left(\frac{1}{2} \tau\right)^n\right|.$$

Подстановка этой оценки в (13.07) приводит к искомому результату: если $\nu > -1/2$ и z положительно, то n -й остаточный член разложения (13.01) ограничен по абсолютной величине первым отбрасываемым членом при условии, что $n \geq \nu - 1/2$. Аналогично для $H_{\nu}^{(2)}(z)$.

¹⁾ В этом пункте мы следуем изложению Ватсона (1949, §§ 7.2 и 7.3).

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. При положительном x положим $\zeta = x - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi$ и $H_v^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{i\zeta} \{P(v, x) + iQ(v, x)\}$, так что

$$J_v(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \{P(v, x) \cos \zeta - Q(v, x) \sin \zeta\},$$

$$Y_v(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \{P(v, x) \sin \zeta + Q(v, x) \cos \zeta\}.$$

Показать, что если $v > -\frac{1}{2}$ и асимптотические разложения

$$P(v, x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s}(v)}{x^{2s}}, \quad Q(v, x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{A_{2s+1}(v)}{x^{2s+1}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

оборваны на n -х членах, то соответствующий остаточный член ограничен по абсолютной величине первым отброшенным членом при условии, что $n \geq \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}$ для $P(v, x)$ или $n \geq \frac{1}{2}v - \frac{3}{4}$ для $Q(v, x)$ ¹⁾.

13.2. Показать, что для модифицированных функций Бесселя справедливы формулы

$$K_v(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A_s(v)}{z^s} + \gamma_n \right\},$$

$$I_n(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{A_s(v)}{z^s} + \delta_n \right\} - \\ - i e^{-v\pi i} \frac{e^{-z}}{(2\pi z)^{1/2}} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A_s(v)}{z^s} + \gamma_n \right\},$$

где величина $|\gamma_n|$ ограничена выражениями

$$2 \exp \left\{ \left| \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) z^{-1} \right| \right\} |A_n(v) z^{-n}| \quad \left(|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi \right),$$

$$2\chi(n) \exp \left\{ \frac{1}{2}\pi \left| \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) z^{-1} \right| \right\} |A_n(v) z^{-n}| \\ \left(\frac{1}{2}\pi < |\arg z| \leq \pi \right),$$

$$4\chi(n) \exp \left\{ \pi \left| \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) (\operatorname{Re} z)^{-1} \right| \right\} |A_n(v) (\operatorname{Re} z)^{-n}| \\ \left(\pi \leq |\arg z| < \frac{3}{2}\pi \right),$$

¹⁾ Более сложными рассуждениями можно показать в каждом случае, что знак остатка совпадает со знаком первого отброшенного члена, если $v \geq 0$ (Ватсон, 1949, § 7.32).

а $|\delta_n|$ удовлетворяет тем же оценкам, но соответственно в секторах

$$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg z \leq -\frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \arg z \leq 0, \quad 0 \leq \arg z < \frac{1}{2}\pi$$

[Ойвер, 1964].

13.3. Определим γ_n как в предыдущем упражнении. С помощью упр. 8.4 показать, что если v действительно, $z > 0$ и $n \geq |v| - 1/2$, то $\gamma_n = \theta A_n(v) z^{-1}$, где $0 < \theta \leq 1$.

13.4. Доказать, что в обозначениях формулы (13.01)

$$\eta_{1,1}(z) = \frac{1}{2i} \frac{1 - v^2}{z} \int_z^{i\infty} \{1 - e^{2i(t-z)}\} \{1 + \eta_{1,1}(t)\} t^{-2} dt.$$

Затем с помощью теоремы 10.2 главы 6 показать, что

$$|\eta_{1,1}(z)| \leq \exp\{|v^2 - 1/4| Y_{z, i\infty}(t^{-1})\} - 1$$

и, следовательно,

$$|H_v^{(1)}(z)| \leq \left| 2^{1/2} (\pi z)^{-1/2} e^{iz - \frac{1}{2} \frac{v^2}{z}} \right| \exp\{|v^2 - 1/4| Y_{z, i\infty}(t^{-1})\},$$

где вариация $Y_{z, i\infty}(t^{-1})$ ограничена по формуле (13.03), в которой нужно положить $n = 1$ и $\chi(1) = \pi/2$.

§ 14*. Неоднородные уравнения

14.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$w'' + f(z)w' + g(z)w = z^\alpha e^{\beta z} p(z), \quad (14.01)$$

в котором α и β — действительные или комплексные постоянные, а $f(z)$, $g(z)$ и $p(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z , имеющие сходящиеся разложения

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s}, \quad p(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{p_s}{z^s} \quad (14.02)$$

в области $A: |z| > a^1$. Общее решение уравнения (14.01) имеет вид

$$w(z) = Aw_1(z) + Bw_2(z) + W(z),$$

где A и B — произвольные постоянные, $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — независимые решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, $W(z)$ — частное решение (14.01). Асимптотические разложения для $w_1(z)$ и $w_2(z)$ были выведены ранее в этой главе; в этом параграфе мы рассмотрим построение асимптотического приближения для $W(z)$.

¹⁾ В действительности рассуждения легко обобщаются на случай, когда ряды (14.02) просто асимптотические при $z \rightarrow \infty$ в заданном секторе.

Заметим, что подстановка $w = e^{\alpha z} v$ преобразует (14.01) в

$$v'' + \{f(z) + 2\beta\}v' + \{g(z) + \beta f(z) + \beta^2\}v = z^\alpha p(z).$$

Это уравнение того же вида, что и (14.01), однако без экспоненциального множителя в свободном члене. Поэтому без потери общности мы можем ограничиться изучением уравнения

$$w'' + f(z)w' + g(z)w = z^\alpha p(z), \quad (14.03)$$

в котором $f(z)$, $g(z)$ и $p(z)$ имеют разложения (14.02).

Решение уравнения (14.03) в виде формального ряда можно найти, подставляя

$$w = z^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s} \quad (14.04)$$

и приравнивая коэффициенты. Это даст

$$g_0 a_s + \sum_{j=1}^s \{g_j + f_{j-1}(\alpha - s + j)\} a_{s-j} + \\ + (a - s + 2)(\alpha - s + 1) a_{s-2} = p_s \quad (14.05)$$

при $s = 0, 1, \dots$ В предположении, что $g_0 \neq 0$, — а для простоты мы всегда будем принимать это допущение, — уравнение (14.05) можно решить, последовательно определяя a_s . В частности,

$$a_0 = g_0^{-1} p_0, \quad a_1 = g_0^{-1} p_1 - g_0^{-2} p_0 (g_1 + \alpha f_0).$$

14.2. Структура рекуррентного соотношения (14.05) показывает, что в общем случае ряд (14.04) расходится при всех конечных значениях z (ср. § 2.1). Чтобы исследовать возможную асимптотическую природу этого разложения, мы построим сначала дифференциальное уравнение для n -й частичной суммы. Следуя § 12.1, положим

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f_s}{z^s} + \frac{F_n(z)}{z^n}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{g_s}{z^s} + \frac{G_n(z)}{z^n}, \\ p(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{z^s} + \frac{P_n(z)}{z^n}$$

при $n = 0, 1, \dots$, так что каждая из функций $F_n(z)$, $G_n(z)$ и $P_n(z)$ ограничена в замкнутой области $B: |z| \geq b$ для любого b , превосходящего a . Введем обозначение

$$L_n(z) = z^\alpha \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s}, \quad (14.06)$$

и пусть $n \geq 1$. Тогда, следуя § 12.2, мы найдем, что

$$L_n''(z) + f(z) L_n'(z) + g(z) L_n(z) - z^\alpha p(z) = z^\alpha R_n(z),$$

где

$$R_n(z) := -\frac{\kappa_0 a_n}{z^n} + \frac{\hat{R}_{n+1}(z)}{z^{n+1}}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{R}_{n+1}(z) = & (\alpha - n)(\alpha - n + 1) a_{n-1} - P_{n+1}(z) + \\ & + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \{(\alpha - s) F_{n-s}(z) + G_{n+1-s}(z)\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|R_n(z)| \leq \frac{\kappa_0 a_n}{|z|^n} + \frac{r_{n+1}}{|z|^{n+1}}, \quad (14.07)$$

где величина r_{n+1} определена равенством

$$r_{n+1} = n^{-1} \sup_{z \in B} |\hat{R}_{n+1}(z)|$$

и конечна.

Предположим теперь, что функция

$$W_{n+1}(z) = L_n(z) + \varepsilon_n(z) \quad (14.08)$$

является решением уравнения (14.03). Тогда остаточный член удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\varepsilon_n''(z) + f(z) \varepsilon_n'(z) + g(z) \varepsilon_n(z) = -z^\alpha R_n(z). \quad (14.09)$$

Методом вариации постоянных получаем

$$\varepsilon_n(z) = w_2(z) I_n^{(1)}(z) - w_1(z) I_n^{(2)}(z), \quad (14.10)$$

где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — решения, определенные теоремой 2.1,

$$I_n^{(j)}(z) = \int_z^{\infty e^{-i\theta_j}} \frac{w_j(t) t^\alpha R_n(t)}{\mathcal{W}(t)} dt \quad (j = 1, 2) \quad (14.11)$$

и

$$\mathcal{W}(t) = w_1(t) w_2'(t) - w_2(t) w_1'(t).$$

Направление θ_j верхнего предела в (14.11) находится в нашем распоряжении при условии, что интеграл сходится.

14.3. По предположению, $f_0^2 \neq 4g_0$ и $g_0 \neq 0$. Следовательно, характеристические значения λ_1 и λ_2 , определенные в § 1.2, не равны между собой и отличны от нуля. Используя тождество Абеля (глава 5, (1.10)) и рассматривая главный член в разложе-

нии (2.04) и в разложении, полученном из (2.04) дифференцированием, мы видим, что для $\mathscr{W}(t)$ существует сходящееся разложение вида

$$\mathscr{W}(t) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} t^{\mu_1 + \mu_2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega_s}{t^s} \quad (|t| > a),$$

где $\omega_0 = 1$. Поэтому

$$\frac{w_1(t)}{\mathscr{W}(t)} \sim \frac{e^{-\lambda_2 t} t^{-\mu_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (14.12)$$

при $t \rightarrow \infty$ в секторе S_1 : $|\arg\{(\lambda_2 - \lambda_1)z\}| \leq (3\pi/2) - \delta$, где δ — произвольная малая положительная постоянная (ср. теорему 2.2). Выбирая $\theta_1 = \arg \lambda_2$ и налагая условие

$$-(3\pi/2) + \arg(\lambda_2 - \lambda_1) + \delta \leq \arg \lambda_2 \leq (3\pi/2) + \arg(\lambda_2 - \lambda_1) - \delta, \quad (14.13)$$

мы видим, что точка $\infty e^{-i\theta_1}$ лежит в S_1 и интеграл $I_n^{(1)}(z)$ сходится. Из (14.07) и (14.12) мы выводим, что

$$\left| \frac{w_1(t) t^\alpha R_n(t)}{\mathscr{W}(t)} \right| \leq K_1 |e^{-\lambda_2 t} t^{\alpha - \mu_2}| \left\{ \frac{|g_n^{\alpha n}|}{|t|^n} + \frac{n r_{n+1}}{|t|^{n+1}} \right\} \quad (t \in S_1 \cap B),$$

где K_1 — некоторая постоянная.

Пусть теперь $B(\delta)$ — бесконечное кольцо $|z| \geq b \operatorname{cosec} \delta$; обозначим через T сектор

$$-(3\pi/2) + \delta - \min\{\arg \lambda_2, \arg(\lambda_2 - \lambda_1)\} \leq \arg z \leq (3\pi/2) - \delta - \max\{\arg \lambda_2, \arg(\lambda_2 - \lambda_1)\},$$

так что $T_1 \subset S_1$ и $\infty e^{-i\theta_1} \in T_1$. Если $z \in T_1 \cap B(\delta)$, то для $I_n^{(1)}(z)$ можно найти путь, лежащий в $T_1 \cap B$ и обладающий свойством $|e^{-\lambda_2 t}| \leq |e^{-\lambda_2 z}|$ (рис. 14.1). Если $n > \operatorname{Re}(\alpha - \mu_2) + 1$, то

$$\begin{aligned} |I_n^{(1)}(z)| &\leq K_1 |e^{-\lambda_2 z}| \left\{ \frac{|g_n^{\alpha n}|}{|n + \mu_2 - \alpha - 1|} \mathscr{W}^{\circ} z, \infty \exp(-i \arg \lambda_2) (t^{-n - \mu_2 + \alpha + 1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r_{n+1}}{|n + \mu_2 - \alpha|} \mathscr{W}^{\circ} z, \infty \exp(-i \arg \lambda_2) (t^{-n - \mu_2 + \alpha}) \right\}. \end{aligned}$$

Если предположить, кроме того, что пути в $\lambda_2 t$ -плоскости совпадают с путями, использованными в t плоскости в § 13 главы 6, — это мы можем сделать, — то обе вариации, входящие в последнее неравенство, имеют порядок $O(z^{-n - \mu_2 + \alpha + 1})$ при $z \rightarrow \infty$. Умножение на $w_2(z)$ дает

$$w_2(z) I_n^{(1)}(z) = O(z^{\alpha - n + 1}).$$

при $z \rightarrow \infty$ в $S_2 \cap T_1$, где S_2 — сектор $|\arg\{(\lambda_1 - \lambda_2)z\}| \leq (\pi/2) - \delta$ (ср. (2.15)).

Аналогично, если $\theta_2 = \arg \lambda_1$ и

$$-(\pi/2) + \arg(\lambda_1 - \lambda_2) + \delta \leq \arg \lambda_1 \leq (\pi/2) + \arg(\lambda_1 - \lambda_2) - \delta, \quad (14.14)$$

то $I_n^{(2)}(z)$ сходится; если, кроме того, $n > \operatorname{Re}(\alpha - \mu_1) + 1$, то

$$w_1(z) I_n^{(2)}(z) = O(z^{\alpha-n+1})$$

при $z \rightarrow \infty$ в $S_1 \cap T_2$, где T_2 определен условием

$$-(\pi/2) + \delta - \min\{\arg \lambda_1, \arg(\lambda_1 - \lambda_2)\} \leq \arg z \leq (\pi/2) - \delta - \max\{\arg \lambda_1, \arg(\lambda_1 - \lambda_2)\}.$$

Поскольку $T_1 \subset S_1$ и $T_2 \subset S_2$, то общая область справедливости этих оценок есть $T \equiv T_1 \cap T_2$. Подстановка полученных результатов в (14.10) дает

$$e_n(z) = O(z^{\alpha-n+1}) \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } T). \quad (14.15)$$

Подставляя (14.06) и (14.15) в (14.08) и отбросив член $z^\alpha a_{n-1}/z^{n-1}$ в остаток $O(z^{\alpha-n+1})$, мы видим, что существует такое решение $W_{n-1}(z)$ уравнения (14.03), что

$$W_{n-1}(z) = z^\alpha \left\{ \sum_{s=0}^{n-2} \frac{a_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right) \right\} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } T). \quad (14.16)$$

Ограничения $n > \operatorname{Re}(\alpha - \mu_1) + 1$ и $n > \operatorname{Re}(\alpha - \mu_2) + 1$, введенные

в процессе доказательства, не являются необходимыми в этом конечном результате, так как из (14.16) очевидно, что

$$W_{n-1}(z) = z^\alpha \left\{ \sum_{s=0}^{m-2} \frac{a_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^{m-1}}\right) \right\},$$

для любого целого числа m из интервала $1 \leq m \leq n$.

14.4. Собирая вместе все полученные результаты и заменяя n на $n+1$, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 14.1. Пусть $f(z)$, $g(z)$ и $p(z)$ — аналитические функции комплексной переменной z , имеющие сходящиеся разложения вида (14.02) для достаточно больших $|z|$, причем $f_0^2 \neq 4g_0$.

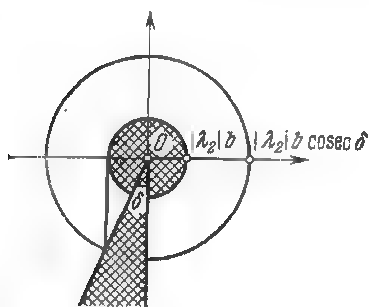


Рис. 14.1. $\lambda_2 t$ -плоскость;

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(\lambda_2 t) \leq \frac{3\pi}{2} - \delta.$$

$u, g_0 \neq 0$. Пусть, кроме того, λ_1 и λ_2 — нули квадратичной формы $\lambda^2 + f_0\lambda + g_0$, где $\arg \lambda_1, \arg \lambda_2, \arg(\lambda_2 - \lambda_1)$ и $\arg(\lambda_1 - \lambda_2)$ выбраны так, что выполняются неравенства (14.13) и (14.14), δ — произвольное положительное число. Тогда, если коэффициенты a , определены формулами (14.05), дифференциальное уравнение (14.03) имеет решение $W_n(z)$, зависящее от произвольного неотрицательного целого числа n , такого, что

$$W_n(z) = z^\alpha \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s}{z^s} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right\} \quad (z \rightarrow \infty \text{ в } T), \quad (14.17)$$

где T — сектор вида

$$\begin{aligned} - (3\pi/2) + \delta &= \min \{ \arg \lambda_1, \arg \lambda_2, \arg(\lambda_2 - \lambda_1), \arg(\lambda_1 - \lambda_2) \} \leq \\ &\leq \arg z \leq (3\pi/2) - \delta = \max \{ \arg \lambda_1, \arg \lambda_2, \arg(\lambda_2 - \lambda_1), \\ &\quad \arg(\lambda_1 - \lambda_2) \}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

При применении этой теоремы следует иметь в виду, что ни один из аргументов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1$ и $\lambda_1 - \lambda_2$ не обязан принимать главное значение. Кроме того, используя различные комбинации λ_1 и λ_2 , которые удовлетворяют (14.13) и (14.14), мы получаем различные секторы справедливости T . Однако при этом не происходит расширения областей справедливости: доказательство показывает, что для данного n с каждой областью T связаны различные решения дифференциального уравнения.

Предположим, например, что $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$. Тогда мы можем взять $\arg(\lambda_2 - \lambda_1) = \pi$ и $\arg(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Условия (14.13) и (14.14) будут выполнены при $\arg \lambda_1 = 0$ и $\arg \lambda_2 = \pi$, и в результате мы получаем, что T имеет вид $-(3\pi/2) + \delta \leq \arg z \leq \leq (\pi/2) - \delta$. Если же мы возьмем $\arg(\lambda_2 - \lambda_1) = -\pi$ и $\arg(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, то будем иметь $\arg \lambda_1 = 0, \arg \lambda_2 = -\pi$, и T задается неравенством $-\pi/2 + \delta \leq \arg z \leq 3\pi/2 - \delta$. Решение, обладающее свойством (14.17) в области $[-3\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$ изменения аргумента, отличается от решения, имеющего это свойство в $[-\pi/2 + \delta, 3\pi/2 - \delta]$.

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Показать, что при $g_0 = 0$ уравнение (14.03) имеет, вообще говоря, формальное решение $z^{\alpha+1} \sum b_s z^{-s}$. Когда это утверждение становится несправедливым?

14.2. Переходя к переменной $\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}$, показать, что уравнение $\frac{d^2 w}{dz^2} = zw - z^{-2}$ имеет решения $w_j(z), j = 0, \pm 1$, такие, что

$$w_j(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s! 3^s \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3s+1)}{z^{3s+1/3}}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg(-ze^{2i\pi/3})| \leq 2\pi/3$ ($\delta < 2\pi/3$).

§ 15*. Уравнение Струве

15.1. В физических и математических приложениях представляют интерес решения следующего неоднородного уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + 1/2)}. \quad (15.01)$$

Используя методы, аналогичные методам § 4 главы 5, мы легко убеждаемся в том, что одним из решений является *функция Струве*:

$$H_\nu(z) = (z/2)^{\nu+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z^2/4)^s}{\Gamma(s+3/2) \Gamma(\nu-s+3/2)}. \quad (15.02)$$

Этот ряд сходится при всех конечных z ; действительно, функция $z^{-\nu-1} H_\nu(z)$ является целой по z . Легко также установить, используя равномерную сходимость, что функция $H_\nu(z)$ — целая по ν , если $z \neq 0$.

Другое решение уравнения (15.01) можно построить методом § 14. В данном случае

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad g(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}, \quad \alpha = \nu - 1, \quad p(z) = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^{\nu-1} \Gamma(\nu + 1/2)}.$$

Из (14.05) мы получаем $a_{2s+1} = 0$ и

$$a_{2s} = \frac{2^{2s-\nu+1} \Gamma(s+1/2)}{\pi \Gamma(\nu-s+1/2)} \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Характеристические значения равны $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Если $\arg \lambda_1 = \arg(\lambda_1 - \lambda_2) = \pi/2$ и $\arg \lambda_2 = \arg(\lambda_2 - \lambda_1) = -\pi/2$, то условия (14.13) и (14.14) удовлетворены, и теорема 14.1 показывает, что для любого положительного целого числа существует решение уравнения (15.01) вида

$$W_{2n}(z) = z^{\nu-1} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_{2s}}{z^{2s}} + O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right) \right\}$$

при $z \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta (< \pi)$.

Все решения $W_{2n}(z)$ совпадают. Чтобы увидеть это, напомним

$$W_{2n}(z) = W_2(z) + A_n H_\nu^{(1)}(z) + B_n H_\nu^{(2)}(z),$$

где A_n и B_n не зависят от z . Полагая $z \rightarrow \infty e^{\pm \pi i/2}$ и используя разложения Ганкеля (4.03) и (4.04), мы видим, что $B_n = -A_n = 0$. Таким образом, уравнение (15.01) имеет единственное

решение $K_\nu(z)$, такое, что

$$K_\nu(z) \sim z^{\nu-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{2s}}{z^{2s}} \quad (z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta). \quad (15.03)$$

15.2. Чтобы связать $H_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, мы снова воспользуемся интегральным представлением. Интеграл для бета-функции и формула удвоения для гамма-функции дают

$$\frac{1}{\Gamma(s+3/2)\Gamma(\nu-s+3/2)} = \frac{2^{2s+1}}{\pi^{1/2}(2s+1)!\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 \tau^s (1-\tau)^{\nu-1/2} d\tau. \quad (15.04)$$

Предполагая, что $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, мы можем подставить (15.04) в (15.02) и изменить порядок интегрирования и суммирования¹⁾. Выбирая $t = \tau$ в качестве новой переменной интегрирования, мы приходим к представлению

$$H_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 \sin(zt)(1-t^2)^{\nu-1/2} dt \quad (\operatorname{Re} \nu > -1/2).$$

Далее нам потребуется асимптотическое разложение последнего интеграла при больших положительных z . Его можно было бы найти с помощью метода стационарной фазы²⁾, но проще воспользоваться контурным интегрированием. Имеем

$$H_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{i\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)} \{U_\nu(z) - V_\nu(z)\}, \quad (15.05)$$

где

$$U_\nu(z) = \int_0^1 e^{izt} (1-t^2)^{\nu-1/2} dt, \quad V_\nu(z) = \int_0^1 e^{-izt} (1-t^2)^{\nu-1/2} dt.$$

Так как $z > 0$, то путь интегрирования в $U_\nu(z)$ можно деформировать, переводя интеграл в $\int_0^\infty - \int_1^{1+i\infty}$. Далее сделаем подстановку $t = i\tau$. Поскольку $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, второй интеграл можно выразить через $H_\nu^{(1)}(z)$, сжимая контур-петлю для интеграла Ганкеля, как в § 13.3. Тогда

$$U_\nu(z) = i \int_0^\infty e^{-z\tau} (1+\tau^2)^{\nu-1/2} d\tau + \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{2(z/2)^\nu} H_\nu^{(1)}(z).$$

¹⁾ Глава 2, теорема 3.1.

²⁾ Эрдейи (1955), Олвер (1974).

Аналогично

$$Y_v(z) = -i \int_0^{\infty} e^{-z\tau} (1 + \tau^2)^{v-1/2} d\tau + \frac{\pi^{1/2} \Gamma(v - 1/2)}{2(z/2)^v} H_v^{(2)}(z).$$

Подстановка этих выражений в (15.05) дает с учетом (5.01)

$$H_v(z) - Y_v(z) = \frac{2(z/2)^v}{\pi^{1/2} \Gamma(v + 1/2)} \int_0^{\infty} e^{-z\tau} (1 + \tau^2)^{v-1/2} d\tau. \quad (15.06)$$

Ограничение $\operatorname{Re} v > -1/2$ теперь можно устранить с помощью аналитического продолжения.

Если применить к (15.06) лемму Ватсона, то окажется, что асимптотическое разложение будет совпадать с (15.03). В § 15.1 мы видели, что решение уравнения (15.01) с таким разложением единственно, и поэтому

$$K_v(z) = H_v(z) - Y_v(z).$$

Это результат с помощью аналитического продолжения обобщается с положительных значений z на комплексные, если только ветви выбираются непрерывным образом. Это и есть искомая формула связи. Мы показали попутно, что правая часть (15.06) дает интегральное представление функции $K_v(z)$ при $|\arg z| < \pi/2$.

15.3. Общее решение уравнения (15.01) можно записать в виде

$$w = H_v(z) + AJ_v(z) + BY_v(z), \quad (15.07)$$

где A и B — произвольные постоянные. Сравнение разложений функций $H_v(z)$, $J_v(z)$ и $Y_v(z)$ в степенные ряды показывает, что этот вид представления является численно удовлетворительным при малых или не слишком больших значениях $|z|$. Но, исключая, возможно, действительную ось, представление (15.07) является неудовлетворительным при больших значениях $|z|$, поскольку все три функции $H_v(z)$, $J_v(z)$ и $Y_v(z)$ имеют доминирующее асимптотическое поведение.

При больших z в секторе $|\arg z| \leq \pi/2$ численно удовлетворительное представление общего решения имеет вид

$$w = K_v(z) + AH_v^{(1)}(z) + BH_v^{(2)}(z),$$

где A и B — снова произвольные постоянные. В верхней части этого сектора функция $H_v^{(1)}(z)$ — подчиненная, $H_v^{(2)}(z)$ — доминирующая, а $K_v(z)$ имеет промежуточное поведение. В нижней части $H_v^{(1)}(z)$ и $H_v^{(2)}(z)$ меняются ролями.

В секторе $\pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ подходящее представление для больших z имеет вид

$$w = -e^{v\pi i} K_v(ze^{-\pi i}) + AH_v^{(1)}(ze^{-\pi i}) + BH_v^{(2)}(ze^{-\pi i}),$$

причем с помощью преобразования переменных легко проверить, что первый член в правой части является решением уравнения (15.01)¹⁾.

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Доказать, что

$$H_{v-1}(z) + H_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} H_v(z) + \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^v}{\pi^{1/2}\Gamma(v + (3/2))},$$

$$\frac{d}{dz} \{z^v H_v(z)\} = z^v H_{v-1}(z),$$

$$H_{v-1}(z) - H_{v+1}(z) = 2H'_v(z) - \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^v}{\pi^{1/2}\Gamma(v + (3/2))},$$

$$\frac{d}{dz} \{z^{-v} H_v(z)\} = \frac{1}{\pi^{1/2}v\Gamma(v + (3/2))} - z^{-v} H_{v+1}(z)$$

15.2. Пусть $v \neq -1/2$ и $\mathcal{G}_v(x)$ — цилиндрическая функция; проверить, что

$$\int x^v \mathcal{G}_v(x) dx = \pi^{1/2} 2^{v-1} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) x \{ \mathcal{G}'_v(x) H'_v(x) - \mathcal{G}'_v(x) H_v(x) \}.$$

15.3. Используя представление (15.06), показать, что если n — неотрицательное целое число, то

$$H_{-n-(1/2)}(z) = (-1)^n J_{n+(1/2)}(z).$$

Показать также, что

$$H_{1/2}(z) = 2^{1/2}(1 - \cos z)/(\pi z)^{1/2}.$$

15.4. Доказать, что

$$K_v(ze^{-\pi i}) = 2i \cos(v\pi) H_v^{(1)}(z) - e^{-v\pi i} K_v(z).$$

15.5. Используя (15.06), показать, что если v действительно, z положительно и $n \geq v - (1/2)$, то n -й остаточный член в (15.03) ограничен по абсолютной величине первым отбрасываемым членом и имеет тот же знак.

¹⁾ Другой путь: если в теореме 14.1 положить $\arg \lambda_1 = \arg(\lambda_1 - \lambda_2) = -3\pi/2$ и $\arg \lambda_2 = \arg(\lambda_2 - \lambda_1) = -\pi/2$, то соответствующее решение будет иметь вид $-e^{v\pi i} K_v(ze^{-\pi i})$.

Исторические сведения и дополнительные ссылки

Материал, касающийся функций Бесселя, вырожденных гипергеометрических функций и функций Струве, является классическим, однако мы уделили большее, чем обычно, внимание выводу свойств прямо из определяющих дифференциальных уравнений. Среди основных источников можно назвать книги Ватсона (1949), Бейтмена и Эрдейи (1973, 1966), Слейтер (1960) и С. С. Ф. (1964). Асимптотическая теория и анализ остаточных членов в случае иррегулярных особых точек основаны на работах Олвера (1964, 1965b). Теоремы 2.1 и 2.2 получены Хорном (1903); приведенные выше доказательства являются новыми. Теоремы 3.1 и 4.1, по-видимому, являются новыми; один результат, связанный с первой из них, принадлежит Хспе и Сибюя (1966).

§§ 1—2. История этих решений в виде рядов коротко описана Эрдейи (1962, глава 3).

§§ 4—8. Основной работой по бесселевым функциям все еще является труд Ватсона (1949). Относительно некоторых дальнейших свойств, касающихся нулей, см. Р. С. (1960); обширные таблицы определенных и неопределенных интегралов можно найти в книгах Люка (1962) и Оберхеттингера (1972).

§ 3.1. Необходимость выделять численно удовлетворительные пары решений уравнения Бесселя (а также уравнения Эйри) в комплексной плоскости не всегда отмечалась составителями таблиц.

§ 6.5. Некоторые оценки остаточного члена для разложения Мак-Магона были получены Хеткоутом (1970a, b).

§§ 9—11. В число монографий о вырожденных гипергеометрических функциях входят книги Бухгольца (1969), Трикоми (1954) и Слейтер (1960a).

§ 11.2. Эти эффективные приближения для функций Уиттекера являются, по-видимому, новыми. Другие асимптотические приближения при больших l получены Казариновым (1955, 1957).

§ 12. Возможно обобщение анализа остаточных членов на уравнения второго порядка, имеющие иррегулярные особые точки произвольного конечного ранга; детали см. в работе Олвера и Стенджера (1965). Более сложным является анализ остаточных членов для системы произвольного числа дифференциальных уравнений первого порядка, имеющих иррегулярные особые точки произвольного ранга; связанные с этим вопросы изучались Стенджером (1966a, b). См. также книгу Вазова (1968, главы 4 и 5).

§ 15.1. 1) Обозначение $K_\nu(z)$ является новым; оно было введено для того, чтобы подчеркнуть необходимость использования численно удовлетворительных решений уравнения Струве.

2) Действительные нули функции $H_\nu(z)$ были изучены Стейнвигом (1970).

ГЛАВА 1

2.4. Неверно. Правую часть следует заменить на $o(e^x)$.

2.6. 4; 1; $4/e^2$.

3.3. $p^p/(e \sin \delta)^p$.

7.3. $(z+1)^{-1} + e^{-z}$.

11.2. 1) $2|n|$; 2) 4; 3) 2; 4) $2/e$.

11.3. 1) 2; 2) 2; 3) $4e^2 - 2$.

ГЛАВА 3

2.6. $\sigma = 0.11$.

8.4. а) да; б) нет.

ГЛАВА 4

1.2. $|\arg x| \leq (3\pi/2) - \delta < 3\pi/2$.

2.1. $|\arg x| \leq (3\pi/4) - \delta < 3\pi/4$.

8.4. Нет; заданный интеграл можно продолжить аналитически.

ГЛАВА 5

3.1. $\pi/2$.

4.1. 1) $z^i \sum a_s z^s$ и сопряженный ряд, где $a_0 = 1$ и

$$a_s/a_{s-1} = (2s^2 + 4is - 3s + 1 - 3i)/(2s^2 + 4is) \quad (s \geq 1).$$

2) $\sum b_s(z-1)^s$ и $\sum c_s(z-1)^{s+(1/2)}$, где $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/3$ и при $s \geq 2$

$$s(2s-1)b_s + 4(s-1)^2b_{s-1} + (2s^2-7s+8)b_{s-2} = 0,$$

$$s(2s+1)c_s + (2s-1)^2c_{s-1} + (2s^2-5s+5)c_{s-2} = 0.$$

6.1. 1) Иррегулярная особая точка ранга 1;

2) иррегулярная особая точка бесконечного ранга;

3) регулярная особая точка с показателем $(3 \pm \sqrt{5})/2$.

6.2. $5z^3 - 3z$ и

$$\frac{1}{z^4} + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 9} \frac{1}{z^6} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11} \frac{1}{z^8} + \dots$$

9.5. Да, с помощью подходящей деформации пути интегрирования.

ГЛАВА 6

2.4. Приближенное значение $w(2) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^{-1} = 1.54 \dots$

$$|\text{остаток}| \leq \left| \frac{1}{2}e \left\{ \varepsilon_1(2) - \frac{1}{2}\varepsilon_1'(1) \right\} + \frac{1}{2}e^{-1} \left\{ -\varepsilon_2(1) + \frac{1}{2}\varepsilon_2'(1) \right\} \right| < 0.03.$$

4.4. Предположим противное, т. е. $\int_x^\infty f^{-5/2} f'^2 dx = \infty$. Поскольку

$$\frac{3}{2} \int_x^\infty f^{-5/2} f'^2 dx = f^{-3/2} f' + \int f^{-3/2} f'' dx, \quad \text{то } f^{-3/2} f' \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

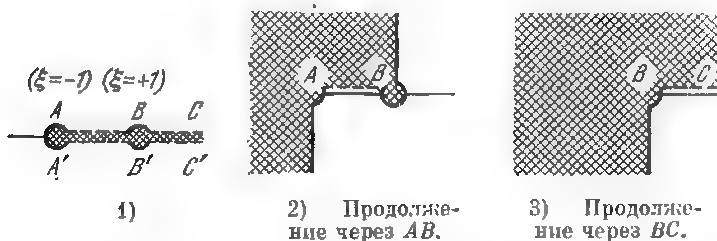
Поэтому $f' < 0$, когда x достаточно велико. Следовательно, f монотонно убывает к некоторому постоянному значению, которое должно быть равным нулю, так как в противном случае $f' \rightarrow -\infty$. Из равенства

$$f' = \text{const} - \int_x^\infty (f^{-3/2} f'') f^{-3/2} dx \text{ следует, что } f' = -c + o(f^{3/2}) \text{ при } x \rightarrow \infty, \text{ где}$$

c неотрицательная постоянная. Если $c > 0$, то интегрирование дает $f \sim -cx$, что противоречит условию. Если же $c = 0$, то имеем $f^{-3/2} f' = o(1)$, что также приводит к противоречию.

Второй результат можно получить, интегрируя выражение $f^{-3/2} f' = \text{const} + o(1)$.

11.1.



Продолжения через $A'B'$ и $B'C'$ приводят к областям, сопряженным к 2) и 3).

12.1. m.

ГЛАВА 7

1.1. Положить $\xi = z^2$ или z^4 .

1.2. $w = A(z^{-3/4} - z^{-5/4})\exp(z^{1/2}) + B(z^{-3/4} + z^{-5/4})\exp(-z^{1/2})$.

1.3.

$$z^{1/4} \exp\{\pm i(8z)^{1/2}\} \sum_{s=0}^{\infty} (\pm i)^s \frac{\left(2L - s + \frac{3}{2}\right) \left(2L - s + \frac{5}{2}\right) \dots \left(2L + s + \frac{1}{2}\right)}{s! (32z)^{s/2}}.$$

14.1. Если а) $f_0 = g_1 = 0$ или б) $f_0 \neq 0$ и $(g_1/f_0) + \alpha + 2$ — положительное целое число.

- А й н с (Ince E. L.)
 (1939) Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат.
- А п о с т о л (Apostol T. M.)
 (1957) Mathematical analysis, Addison—Wesley, Reading, Massachusetts.
- Б. А. (British Association for the Advancement of Science)
 (1952) Mathematical tables, Vol. X, Bessel functions. Pt. II. Functions of positive integer order. Cambridge Univ. Press, London and New York.
- Б а р н с (Barnes E. W.)
 (1906) The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 206, 249—297.
- Б ей т м е н Г. и Э р д е й и А.
 Высшие трансцендентные функции. М., «Наука» (1973), т. 1; (1966), т. 2; (1967), т. 3.
- Б е р г (Berg L.)
 (1968) Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Б л а й с т е й н и Х а н д е л с м а н (Bleistein N. and Handelsman R. A.)
 (1975) Asymptotic expansions of integrals. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Б л а й с т е й н, Х а н д е л с м а н и Л ь ю (Bleistein N., Handelsman R. A., and Lew J. S.)
 (1972) Functions whose Fourier transforms decay at infinity: An extension of the Riemann—Lebesgue lemma. SIAM J. Math. Anal. 3, 485—495.
- Б о й л (Boin P. W. M.)
 (1965) On the method of stationary phase for double integrals. Waltman Delit.
- Б р и л л ю э в (Brillouin L.)
 (1926) Remarques sur la mecanique ondulatoire. J. Phys. Radium [6], 7, 353—368.
- Б р о м у и ч (Bromwich T. J. I'A)
 (1926) An introduction to the theory of infinite series, 2nd ed. Macmillan, London.
- Б у р к х а р д т (Burkhardt H.)
 (1914) Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung. S.-B. München Akad. Math.-Phys., 1—11.
- Б у х г о л ь ц (Buchholz H.)
 (1969) The confluent hypergeometric function, translated by H. Lichtblau and K. Wetzel from 1953. German ed. Springer—Verlag, Berlin and New York.
- Б а к х у м (Bakhoom N. G.)

(1933) Asymptotic expansion of the function $F_h(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^h + xu} du$. Proc. London Math. Soc. [2], 35, 83—100.

- В а з о в В. (Wasow W.)
 (1968) Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир».
- В а н д е р К о р п у т (van der Corput J. G.)
 (1934) Zur Methode der stationären Phase I. *Compositio Math.* 1, 15—38.
 (1936) Zur Methode der stationären Phase. II. *Compositio Math.* 3, 328—372.
 (1956) Asymptotic developments I, Fundamental theorems of asymptotics. *J. Analyse Math.* 4, 341—418.
- В а н д е р К о р п у т и Ф р а н к л и н (van der Corput J. G. and Franklin J.)
 (1951) Approximation of integrals by integration by parts. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54, 213—219.
- В а т с о н (Watson G. N.)
 (1911) A theory of asymptotic series. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 211, 279—343.
 (1918a) The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. *Proc. London Math. Soc.* 17, 116—148.
 (1918b) The limits of applicability of the principle of stationary phase. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19, 49—55.
 (1918c) Asymptotic expansions of hypergeometric functions. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 22, 277—308.
 (1949) Теория бесселевых функций, М., ИЛ.
- В е н т ц е л ь (Wentzel G.)
 (1926) Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, *Z. Physik* 38, 518—529.
- Г а н к е л ь (Hankel H.)
 (1864) Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes. *Z. Math. Physik* 9, 1—21.
- Г а н с (Gans R.)
 (1915) Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium. *Ann. Physik* [4], 47, 709—736.
- Г е л л е р и Н г (Geller M., and Ng E. W.)
 (1969) A table of integrals of the exponential integral. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* 73, 191—210.
- Г р и н (Green G.)
 (1837) On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 6, 457—462.
- Г о б с о н Е. В. (Hobson E. W.)
 (1952) Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ.
- Г у д в и н и С т е й т о н (Goodwin E. T. and Staton J.)
 (1948) Table of $\int_0^{\infty} \{e^{-u^2}/(u+x)\} du$. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1, 319—326.
- Д е б а й (Debye P.)
 (1909) Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. *Math. Ann.* 67, 535—558.
- Д е Б р е й н Н. Г.
 (1961) Асимптотические методы в анализе, М., ИЛ.
- Д е К о к (de Kok F.)
 (1971) On the method of stationary phase for multiple integrals. *SIAM J. Math. Anal.* 2, 76—104.
- Д о е т с х (Doetsch G.)
 (1950) *Handbuch der Laplace-Transformation*, Vol. I, Birkhäuser, Basel.
 (1955) *Handbuch der Laplace-Transformation*, Vol. II, Birkhäuser, Basel.
- Д ж е ф ф р и с Г. и С в и р л с Б.
 (1969—1970) Методы математической физики I, II, III. М., «Мир».

- Джеффрис** (Jeffreys H.)
 (1924) On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. *Proc. London Math. Soc.* [2], 23, 428—436.
 (1953) On approximate solutions of linear differential equations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 49, 601—611.
- Джонс** Д. С. (Jones D. S.)
 (1966) Fourier transforms and the method of stationary phase. *J. Inst. Math. Appl.* 2, 197—222.
 (1972) Asymptotic behavior of integrals. *SIAM Rev.* 14, 286—317.
- Джонс** Э. Л. (Jones A. L.)
 (1968) An extension of an inequality involving modified Bessel functions. *J. Math. and Phys.* 47, 220—221.
- Дьедонне** (Dieudonne J.)
 (1968) *Calcul infinitesimal*. Hermann, Paris.
- Дэйвис** (Davis P. J.)
 (1953) Existence and uniqueness theorems for asymptotic expansions. In *Selected topics in the theory of asymptotic expansions*. Nat. Bur. Standards Rep. No. 2392, pp. 63—102. U. S. Nat. Bur. Standards, Washington, D. C.
 (1957) Uniqueness theory for asymptotic expansions in general regions. *Pacific J. Math.* 7, 849—859.
 (1959) Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function. *Amer. Math. Monthly* 66, 849—869.
- Евграфов** М. А.
 (1962) Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз.
- Казаринов** (Kazarinoff N. D.)
 (1955) Asymptotic expansions for the Whittaker functions of large complex order m . *Trans. Amer. Math. Soc.* 78, 305—328.
 (1957) Asymptotic forms for the Whittaker functions with both parameters large. *J. Math. Mech.* 6, 341—360.
- Калоджеро** Ф. (Calogero F.)
 (1972) Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., «Мир».
- Каратеодори** (Carathéodory C.)
 (1960) *Theory of functions of a complex variable*, Vol. II (2nd ed.), translated by F. Steinhardt. Chelsea, Bronx, New York.
- Карлеман** (Carleman T.)
 (1926) *Les fonctions quasi analytiques*. Gauthier-Villars, Paris.
- Кельвин** (Kelvin (Lord))
 (1887) On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in dispersive medium. *Philos. Mag.* [5] 23, 252—255. Reprinted in *Mathematical and physical papers*, Vol. 4, pp. 303—306. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1910.
- Кертис** А. Р. (Curtis A. R.)
 (1969) Волновые функции Кулона, М., Вычислит. центр АН СССР.
- Клаузен** (Clausen Th.)
 (1828) Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form..., *J. Reine Angew Math.* 3, 89—91.
- Клейн** (Klein F.)
 (1894) *Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung*. Ritter, Göttingen. Reprinted by Teubner, Leipzig, 1906.
- Кон** (Cohn J. H. E.)
 (1967) Large eigenvalues of a Sturm—Liouville problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 63, 473—475.
- Коппель** (Coppel W. A.)
 (1965) *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. Heath, Boston, Massachusetts.

- Копсон** (Copson E. T.)
 (1935) Theory of functions of a complex variable. Oxford Univ. Press, London and New York.
 (1963) On the asymptotic expansion of Airy's integral. Proc. Glasgow Math. Assoc. 6, 113—115.
 (1966) Асимптотические разложения, М., «Мир».
- Кохран** (Cochran J. A.)
 (1967) The monotonicity of modified Bessel functions with respect to their order. J. Math. and Phys. 46, 220—222.
- Краммерс** (Kramers H. A.)
 (1926) Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. Z. Physik 39, 828—840.
- Лайнесс** (Lyness J. N.)
 (1971) Adjusted forms of the Fourier coefficient asymptotic expansion and applications in numerical quadrature. Math. Comp. 25, 87—104.
- Лангер** (Langer R. E.)
 (1931) On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 23—64.
 (1933) On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes' phenomenon about a singular point. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 394—416.
- Ландау** (Landau E.)
 (1927) Vorlesungen über Zahlentheorie, Sec. 1, Hirzel, Stuttgart. Reprinted by Chelsea, Bronx, New York, 1947.
- Лаплас** (Laplace (Le Marquis de))
 (1820) Theorie analytique des probabilites, 3rd ed. Courcier, Paris. Reprinted in *Complete works*, Vol. 7, Gauthier—Villars, Paris, 1886.
- Левинсон и Редхейффер** (Levinson N., and Redheffer R. M.)
 (1970) Complex variables. Holden—Day, San Francisco, California.
- Лиувилль** (Liouville J.)
 (1837) Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries... J. Math. Pures Appl. [1] 2, 16—36.
- Ловерье** (Lauwerier H. A.)
 (1966) Asymptotic expansions, Math. Centre Tracts No. 13., Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- Ломмель** (Lommel E. C. J. von)
 (1868) Studien über die Bessel'schen Functionen. Teubner, Leipzig.
- Люк** (Luke Y. L.)
 (1962) Integrals of Bessel functions. McGraw-Hill, New York.
 (1969a) The special functions and their approximations, Vol. I, Academic Press, New York.
 (1969b) The special functions and their approximations, Vol. II. Academic Press, New York.
- Макдональд** (Macdonald H. M.)
 (1899) Zeros of the Bessel functions. Proc. London Math. Soc. 30, 165—179.
- Мак-Роберт** (MacRobert T. M.)
 (1967) Spherical harmonics, 3rd ed. Pergamon, Oxford.
- Мак-Хаф** (McHugh J. A. M.)
 (1971) An historical survey of ordinary linear differential equations with a large parameter and turning points. Arch. History Exact Sci. 7, 277—324.
- Медхерст и Робертс** (Medhurst R. G., and Roberts J. H.)
 (1965) Evaluation of the integral

$$I_n(b) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (\sin x/x)^n \cos(bx) dx. \text{ Math. Comp. 19, 113—117.}$$

- Миллер (Miller J. C. P.)
(1950) On the choice of standard solutions for a homogeneous linear differential equation of the second order. *Quart. J. Mach. Appl. Math.* 3, 225—235.
(1968) Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра), М., Вычислит. центр АН СССР.
- Нг и Геллер (Ng E. W., and Geller M.)
(1969) A table of integrals of the error functions. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* 73, 1—20.
- Наттерер (Natterer F.)
(1969) Einschliessungen für die grossen Eigenwerte gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung. *Numer. Math.* 13.
- Оберхеттингер (Oberhettinger F.)
(1972) *Tables of Bessel transforms*. Springer-Verlag, Berlin and New York.
- Олвер (Olver F. W. J.)
(1950) A new method for the evaluation of zeros of Bessel functions and of other solutions of second-order differential equations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 46, 570—580.
(1959) Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* 63, 131—169.
(1961) Error bounds for the Liouville—Green (or WKB) approximation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 57, 790—840.
(1964) Error bounds for asymptotic expansions, with an application to cylinder functions of large argument. In *Asymptotic solutions of differential equations and their applications* (C. H. Wilcox, ed.) pp. 163—183. Wiley, New York.
(1965a) Error bounds for asymptotic expansions of special functions in the complex plane. In *Error in digital computation* (L. B. Rall, ed.), Vol. 2, pp. 55—75. Wiley, New York.
(1965b) On the asymptotic solutions of second-order differential equations having an irregular singularity of rank one, with an application to Whittaker functions. *SIAM J. Numer. Anal. Ser. B* 2, 225—243.
(1968) Error bounds for the Laplace approximation for definite integrals. *J. Approximation Theory* 1, 293—313.
(1970) Why steepest descents? In *Studies in applied mathematics*, No. 6 (D. Ludwig and F. W. J. Olver, eds.), pp. 44—63. Soc. Indust. and Appl. Math., Philadelphia. Reprinted in *SIAM Rev.* 12, 228—247.
(1974) Error bounds for stationary phase approximations. *SIAM J. Math. Anal.* 5, 19—29.
- Олвер и Стенджер (Olver F. W. J., and Stenger F.)
(1965) Error bounds for asymptotic solutions of second-order differential equations having an irregular singularity of arbitrary rank. *SIAM J. Numer. Anal. Ser. B* 2, 244—249.
- Пайк (Pike E. R.)
(1964) On the related-equation method of asymptotic approximation (W. K. B. or A—A method) I. A proposed new existence theorem. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 17, 105—124.
- Питтнауэр (Pittnauer F.)
(1969) Holomorphic functions with prescribed asymptotic expansions. *SIAM J. Appl. Math.* 17, 607—613.
- Полыа Г. и Сеге Г. (Pólya G., Szegő G.)
(1956) Задачи и теоремы из анализа, М., Гостехиздат.
- Похгаммер (Pochhammer L.)
(1890) Zur Theorie der Euler'schen Integrale. *Math. Ann.* 35, 495—526.
- Пуанкаре (Poincaré H.)
(1886) Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Math.* 8, 295—344.

- (1904) Sur la diffraction des ondes électriques. Proc. Roy. Soc. London 72, 42—52.
- Рейдink (Reudink D. O. J.)
- (1968) On the signs of the v -derivatives of the modified Bessel functions $I_v(x)$ and $K_v(x)$. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 72, 279—280.
- Рейли (Rayleigh (Lord))
- (1912) On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 86, 207—226.
- Ренч (Wrench J. W., Jr.)
- (1968) Concerning two series for the Gamma Function. Math. Comp. 22, 617—626.
- Рекстиньш Э. Я.
- (1965) О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению некоторых интегралов. Латв. матем. ежегодник, 1, 5—21.
- (1968) Об асимптотическом разложении последовательностей, образованных итеративным процессом. Латв. матем. ежегодник 4, 291—311.
- Риман (Riemann B.)
- (1857) Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. Abh. Kgl. Gesellsch. Wiss. Göttingen 7. Reprinted in *Complete works* 2nd ed., pp. 67—83. Teubner, Leipzig, 1892, or Dover, New York, 1953.
- (1859) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsb. Berliner Akad. Reprinted in *Complete works* 2nd ed., pp. 145—135. Teubner, Leipzig, 1892, or Dover, New York, 1953.
- (1863) Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita. *Complete works*, 2nd ed., pp. 424—430. Teubner, Leipzig, 1892, or Dover, New York, 1953.
- Ритчи (Ritchie R. H.)
- (1950) On a definite integral. Math. Tables Aids Comput. 4, 75—77.
- Ритт (Ritt J. F.)
- (1916) On the derivatives of a function at a point. Ann. of Math. 18, 18—23.
- (1918) On the differentiability of asymptotic series. Bull. Amer. Math. Soc. 24, 225—227.
- Робин (Robin L.)
- (1957) Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, Vol. I, Gauthier-Villars, Paris.
- (1958) Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, Vol. II. Gauthier-Villars, Paris.
- (1959) Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, Vol. III. Gauthier-Villars, Paris.
- Р. С. (Royal Society)
- (1960) Mathematical tables, Vol. 7, Bessel functions Pt. III. Zeros and associated values (F. W. J. Oliver, ed.). Cambridge Univ. Press, London and New York.
- Сеге Г. (Czegö G.)
- (1962) Ортогональные многочлены, М., Физматгиз.
- Слейтер Л. Дж. (Slater L. J.)
- (1966a) Вырожденные гипергеометрические функции. М., Вычисл. центр АН СССР.
- (1966b) Generalized hypergeometric functions. Cambridge Univ. Press, London and New York.
- Сноу (Snow C.)
- (1952) Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. No. 19. U. S. Govt. Printing Office, Washington, D. C.

- С. С. Ф. (National Bureau of Standards) Handbook of mathematical functions. (1964) Appl. Math. Ser. № 55 (M. Abramowitz, I.A. Stegun, eds). U. S., Washington, D. C. (Готовится к печати русский перевод: Справочник по специальным функциям.)
- Стейниг (Steinig F.)
(1970) The real zeros of Struve's function. SIAM J. Math. Anal. 1, 365—375.
- Стенджер (Stenger F.)
(1966a) Error bounds for asymptotic solutions of differential equations I. The distinct eigenvalue case. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 70, 167—186.
(1966b) Error bounds for asymptotic solutions of differential equations II. The general case. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 70, 187—210.
- Стеффенсен Дж. Ф. (Steffensen J. F.)
(1935) Теория интерполяции, М—Л., ОНТИ.
- Стокс (Stokes G. G.)
(1850) On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. Trans. Cambridge Philos. Soc. 9, 166—187. Reprinted in *Mathematical and physical papers*, vol. 7, pp. 329—357. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1883.
(1857) On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments. Trans. Cambridge Philos. Soc. 10, 105—128. Reprinted in *Mathematical and physical papers*, Vol. 4, pp. 77—109. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1904.
- Сweeney D. W.)
(1963) On the computation of Euler's constant. Math. Comp. 17, 170—178.
- Титчмарш Е. К. (Titchmarsh E. C.)
(1931) Теория функций, М—Л., ГИТТЛ.
(1953) Теория дзета-функции Римана, М., ИЛ.
- Торн (Thorne R. C.)
(1960) Asymptotic formulae for solutions of linear second-order differential equations with a large parameter. J. Austral. Math. Soc. 1, 439—464.
- Трикоми (Tricomi F. G.)
(1951) Funzioni ipergeometriche confluenti. Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monogr. Mate. 1, Edizioni Cremonese, Rome.
- Трикоми и Эрдейи (Tricomi F. G., and Erdelyi A.)
(1951) The asymptotic expansion of a ratio of Gamma functions, Pacific J. Math. 1, 133—142.
- Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н. (Whittaker E. T., Watson G. N.)
(1963) Курс современного анализа, М., Физматгиз.
- Урселл (Ursell F.)
(1970) Integrals with a large parameter: Paths of descent and conformal mapping. Proc. Cambridge Philos. Soc. 67, 371—381.
- Уаймен (Wyman M.)
(1964) The method of Laplace. Trans. Roy. Soc. Canada 2, 227—256.
- Уаймен и Уонг (Wyman M., and Wong R.)
(1969) The asymptotic behaviour of $\mu(z, \beta, \alpha)$. Canad. J. Math. 21.
- Уиддер (Widder D. V.)
(1941) The Laplace transform. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.
- Федорюк М. В.
(1970) Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от границы области, ЖВММФ, 10, № 2, 286—299.
- Феррерс (Ferrers N. M.)
(1877) Spherical harmonics. Macmillan, London.
- Фикс (Fix G.)
(1967) Asymptotic eigenvalues of Sturm—Liouville systems. J. Math. Anal. Appl. 19, 519—525.

- Фробениус (Frobenius G.)**
(1873) Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen. J. Reine Angew. Math. 76, 215—235.
- Фукс (Fuchs L.)**
(1866) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten. J. Reine Angew. Math. 66, 121—160.
- Хартман Ф. (Hartman P.)**
(1970) Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир».
- Хеткоут (Hethcote H. W.)**
(1970a) Bounds for zeros of some special functions. Proc. Amer. Math. Soc. 25, 72—74.
(1970b) Error bounds for asymptotic approximations of zeros of transcendental functions. SIAM J. Math. Anal. 1, 147—152.
- Хорн (Horn J.)**
(1903) Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelt successive Annäherungen. Arch. Math. Physik Leipzig [3], 4, 213—230.
- Хохштадт (Hochstadt H.)**
(1961) Special functions of mathematical physics. Holt, New York.
- Хsieh П. С и Sibuya Y.**
(1966) On the asymptotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients. J. Math. Anal. Appl. 16, 84—103.
- Цирулис Т. Т.**
(1969) О некотором обобщении метода стационарной фазы. Латв. матем. ежегодник 5, 175—194.
- Чакр (Chako N.)**
(1965) Asymptotic expansions of double and multiple integrals occurring in diffraction theory. J. Inst. Math. Appl. 1, 372—422.
- Черри (Cherry T. M.)**
(1950) Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 224—237.
- Шмидт (Schmidt H.)**
(1937) Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. Math. Ann. 113, 629—656.
- Эйри (Airy J. R.)**
(1937) The «converging factor» in asymptotic series and the calculation of Bessel, Laguerre and other functions. Philos. Mag. [7], 24, 521—552.
- Эрдelyи (Erdelyi A.)**
(1946) Asymptotic representation of Laplace transforms with an application to inverse factorial series. Proc. Edinburgh Math. Soc. [2], 8, 20—24.
(1950) Note on the paper «On a definite integral» by R. H. Ritchie. Math. Tables Aids Comput. 4, 179.
(1955) Asymptotic representations of Fourier integrals and the method of stationary phase. J. Soc. Indust. Appl. Math. 3, 17—27.
(1961) General asymptotic expansions of Laplace integrals. Arch. Rational Mech. Anal. 7, 1—20.
(1962) Асимптотические разложения. М., Физматгиз.
(1964) The integral equations of asymptotic theory. In *Asymptotic solutions of differential equations and their applications* (C. H. Wilcox, ed.), pp. 211—229. Wiley, New York.
- Эрдelyи и Уаймен (Erdelyi A., and Wyman M.)**
(1963) The asymptotic evaluation of certain integrals. Arch. Rational Mech. Anal. 14, 217—260.

Абель (Abel N. H.) 14
 Абеля теорема о непрерывности
 степенного ряда 42
 — тождество 132
 Айнс (Ince E. L.) 240, 296
 Ангера функция 112, 135
 Асимптотика 43
 Асимптотическая переменная 29

— последовательность 40
 — сумма 38
 — шкала 40

Асимптотические приближения
 (см. Асимптотическое разло-
 жение, асимптотические соотно-
 шения)

— решения дифференциальных ура-
 внений (см. Дифференциальные
 уравнения)

— соотношения 15—19, 40 (см. так-
 же Асимптотическое разложение)

Асимптотическое поведение сте-
 пенного ряда на границе кру-
 га сходимости 42

Асимптотическое разложение 15,
 12 (см. также Асимптотические
 соотношения, Асимптотика,
 Дифференциальные уравнения)

— —, граничная постоянная 16,
 18, 29

— —, до N -го члена 30

— —, единственность 30

— —, интегралов 90—95, 100—106,
 139—146 (см. также Ватсона
 лемма, Лапласа метод, метод пе-
 ревала, метод стационарной фазы)

— —, история 14, 46

— —, обобщенное 41, 46, 153

— —, операции 33—37

— —, определение Пуанкаре 14,
 29, 40, 137

— —, основные свойства 29—32

— —, составное 153

— —, сходимость 31, 32

— —, функции с заданными асим-
 птотическими разложениями 37—
 39, 46

Асимптотическое разложение, экс-
 поненциально малые члены 104—
 —105, 126, 137
 — решение дифференциальных
 уравнений (см. Дифференциаль-
 ные уравнения)

Б. А. (British Association for
 the Advancement of Science)
 173

Барнс (Barns E. W.) 84

Бахманн (Bachmann P.) 15

Берг (Berg L.) 46

Бесселя уравнение 79

— — модифицированное 83

— — неоднородное 352

— —, численно удовлетворитель-
 ные решения 309—310, 356

Бесселя функция 78, 80 310 (см.
 также Бесселя уравнение, Ган-
 келя функции, Модифицирован-
 ные функции Бесселя)

— —, аналитическое продолжение
 80, 314

— —, вронскиан 312

— —, графики 311

— —, дифференциальное уравнение
 79

— —, интеграл Бесселя 78

— —, — Пуассона 83

— —, интегральные представления
 78—82, 312, 355, 356

— —, интегралы 82, 83, 313, 356,
 357

— —, — Мелера — Соинна 312

— —, — Шлефли 81

— —, история 356

— —, мнимого аргумента 83

— —, нули 273, 313—320, 356

— —, оценки 82

— —, первого, второго, третьего
 рода 309

— —, полуслого порядка 82, 309,
 312

— — при больших значениях аргу-
 мента 169, 310, 345

- Бесселя функции производные по порядку 311, 313
 — —, производящая функция 79
 — —, рекуррентные формулы 81
 — —, ряды 78, 80
 — —, связь с вырожденной гипергеометрической функцией 327
 — —, теорема сложения Неймана 82
 — —, формулы связи 305, 306, 309—312
 Бета-функция 53, 54
 Блайстейн (Bleistein N.) 137, 138
 Бойн (Boin P. W. M.) 138
 Бриллюэна (Brillouin L.) 291
 Бромвича (Bromwich T. J. I'a) 12, 34, 46
 Буркхардт (Burkhardt H.) 137
 Бухгольца (Buchholz H.) 356
 Бакхума (Bakhoorn N. G.) 112
- Вазов (Wasow W.) 356
 Ван-дер-Корпут (van der Korput J. G.) 43
 Вариационный оператор 43
 Вариация 43 45
 —, сходимость в особой точке 256—258
 Ватсона (Watson G. N.) 46, 88, 96, 137, 195, 206, 240, 291, 315, 319, 325, 344, 345, 356
 Ватсона лемма
 — — для действительных переменных 95
 — — — интегралов по петле 156
 — — — комплексных переменных 146
 — —, история 137
 — —, оценки остатка 118—122, 137, 149—151
 Вебера (Weber H. F.) 135
 Вебера дифференциальное уравнение 188, 264, 273
 Вебера функции параболлического цилиндра (см. Функции параболлического цилиндра)
 — функция $E_\nu(x)$ 135
 — $Y_\nu(z)$ 245 (см. также Функции Бесселя)
 Вентцель (Wentzel G.) 291
 Вероятностей интеграл 62, 89
 — —, асимптотическое разложение 91, 146
 — — дополнительный 62
 — —, связь с гамма функцией 65
 Весовая функция 65
 ВКБ-метод (или ВКБД метод) 291—292
 Вполне монотонная функция 93, 95
 Вронскиан 181
 Выделенная точка 17, 40
 Вырожденная гипергеометрическая функция 326 (см. также Лагерра полиномы, Уиттекера функции)
 — —, вронскиан 327, 331
 — —, зависимость от параметров 326
 — —, интегральные представления 327—329
 — —, история 356
 — —, преобразования Куммера 328, 329
 — — — при больших значениях аргумента 328—330
 — —, рекуррентные формулы 328, 332
 Вырожденное гипергеометрическое уравнение 325 (см. также Уиттекера уравнение)
 — —, асимптотические решения 328
 — — — с показателями, отличающимися на целое число 331
 — —, формулы связи для решений 329—332
 — —, численно удовлетворительные решения 332
- Гамма-функция 47 (см. также Гамма-функция неполная, Пси-функция)
 — —, асимптотическое разложение 113—117, 143
 — —, интеграл Ганкеля по петле 54—55
 — —, — Похгаммера по петле 56
 — —, интегралы Эйлера 47, 53
 — —, история 64
 — —, минимум 57
 — —, неполная 64
 — —, особые точки 49
 — —, предельная формула Эйлера 50
 — —, представление в виде произведения 51
 — —, разложение в $z=1$ 88
 — —, рекуррентная формула 48
 — —, формула отражения 52
 — —, — удвоения 52
 — —, — умножения 52
 — —, неполная 64, 89, 131
 — —, асимптотическое разложение 90—91, 94—95, 143—146, 174

- Гамма-функция неполная, дополни-
 тельная 64, 65
 — — —, оценки 91, 95, 174
 — — —, связь с гипергеометриче-
 ской функцией
 Ганкель (Hankel H.) 54, 172
 Ганкеля разложения 304
 — —, оценки остатка 341—344
 — функции 303
 — —, аналитическое продолжение
 304
 — —, вронскианы 309
 — —, интегралы Ганкеля 308
 — —, — Зоммерфельда 308
 — —, оценки 346
 — —, полуделого порядка 303
 — — при больших значениях аргу-
 мента 304—306, 341—345
 — —, рекуррентные формулы 308
 — —, связь с функциями Бесселя
 305, 306, 309
 Ганс (Gans R.) 292
 Гаусс (Gauss C. F.) 205
 Геллер (Geller H.) 89
 Гипергеометрическая функция 202
 (см. также Гипергеометрическое
 уравнение)
 — —, асимптотическое разложение
 при больших значениях парамет-
 ров 206—207
 — —, зависимость от параметров
 203
 — —, интеграл Похгаммера по пет-
 ле 206
 — —, интегральные представления
 204, 206
 — —, история 240—241
 — —, квадратичное преобразование
 212
 — — обобщенная 213, 240
 — —, особые точки 203
 — —, поведение в $z=1$ 204, 209—
 210
 — — при больших значениях аргу-
 мента 211
 — —, производные 206
 — —, связь с элементарными функ-
 циями 203, 205
 — — смежная 206, 225
 Гипергеометрический ряд 202
 Гипергеометрическое уравнение 198
 — —, второе решение при $c=-1$,
 $-2, \dots$ 212—213
 — — обобщенное 213
 — —, формулы связи для решений
 209—212
 Главное значение интеграла (в
 смысле Коши) 58, 59
 Гобсон (Hobson E. W.) 234, 241
 Грин (Green G.) 291, 292
 Гудвин (Goodwin E. T.) 63
 Гудвина — Стиртона интеграл 63,
 150
 Дебай (Debye P.) 173, 177
 Де Брейн (de Bruijn N. G.) 40, 46,
 177
 Де Кок (de Kok F.) 138
 Джеффрис (Jeffreys H.) 263, 291, 292
 Джоунс Д. С. (Jones D. S.) 137, 175
 Джоунс Э. Л. (Jones A. L.) 322
 Дзета-функция 84—88
 Дигамма-функция 56
 Дифференциальные уравнения (см.
 Связи формулы, Иррегулярные
 особые точки, ЛГ-приближение,
 Особые точки дифференциальных
 уравнений)
 — —, метод Коши для теорем суще-
 ствования 189
 — —, — Пикара для теорем суще-
 ствования 181
 — —, — последовательных при-
 ближений 181, 208
 — —, нормальный ряд 285
 — —, нули решений 270—273
 — —, обыкновенная точка 189, 195
 — —, подчиненные решения 197,
 254
 — —, решения доминирующие 197,
 254
 — —, линейная независимость
 181, 186, 196
 — —, — локальное поведение 242
 — —, — неоднородные 182, 346—
 351
 — —, — нормальные 295
 — —, — осцилляционного типа 243
 — —, — субнормальные 296
 — —, — фундаментальные 181—
 186
 — —, — численно удовлетвори-
 тельные 196—198, 286
 — — с простым полюсом 266—270
 (см. также Особые точки диффе-
 ренциальных уравнений)
 — — с тремя особыми точками 199
 — —, теоремы существования для
 действительных переменных
 178—188, 240
 — —, тождество Кейли 245
 Дифференциальные уравнения с па-
 раметром (см. Связи формулы,

- ЛГ-приближение, Особенности дифференциальных уравнений) — — — —, асимптотические решения 259—264, 266—269, 287
- — — —, голоморфность решений 185, 187, 302
- — — —, непрерывность решений 183, 185
- — — —, нули решений 270—273
- — — —, оценки остатков для асимптотических решений 259—261, 266
- — — —, собственные значения 274, 292
- — — —, — решения 274, 276
- — — —, — функции 274
- Дуга H_1, R_2, R_∞ 188
- Евграфов М. А. 111
- Жордана неравенство 59
- Задачи на собственные значения 274—278
- Интегральная показательная функция 56—59, 89
- — — —, асимптотическое разложение 146, 291
- — — —, дополнительная 58
- — — —, обобщенная 61
- — — —, связь с гамма-функцией 65
- Интегральные уравнения 278—281, 292
- Интегральный косинус 60, 61
- — — —, асимптотическое разложение 91
- — — —, преобразование Лапласа 61
- — — —, логарифм 59, 88
- — — —, синус 59
- — — —, асимптотическое разложение 91
- — — —, преобразование Лапласа 61
- Интегрирование рядов асимптотических 34—35
- — — —, сходящихся 176
- Иррегулярные особые точки 189 (см. также Особые точки дифференциальных уравнений)
- — — —, асимптотические решения 251—255, 286—287, 296—302
- — — —, история 356
- — — —, ЛГ-приближение 294
- — — —, на бесконечности 195—196
- — — —, неоднородных уравнений 346—351
- Иррегулярные особые точки, нормальные решения 295
- — — —, оценки остатков для асимптотических решений 284, 340, 356
- — — —, ранг 189, 196
- — — —, характеристическое значение 295
- — — —, — уравнение 295
- Казаринов (Kazarinoff N. D.) 356
- Калоджеро (Calogero F.) 268
- Каратеодори (Caratheodory C.) 240
- Карлеман (Carleman T.) 46
- Карлини (Carlini F.) 291
- Кельвин (Kelvin (Lord)) 137
- Кельвина функции 84
- Кертис (Curtis A. R.) 296
- Клаузен (Klausen Th.) 214
- Кohn (Kohn J. H. E.) 292
- Коппель (Coppel W. A.) 259
- Корсон (Corson E. T.) 36, 83, 157, 160, 177
- Кохран (Kochran J. A.) 322
- Крамерс (Kramers H. A.) 291
- Кроузера символ 66
- Кузнера функция 326 (см. также вырожденная гипергеометрическая функция)
- Латерра полиномы 69, 71, 74
- — — —, связь с вырожденными гипергеометрическими функциями 332
- Лайнесс (Lyness J. N.) 137
- Лангер (Langer R. E.) 292
- Ландау (Landau E.) 15
- Лаплас (Laplace, Le Marquis de) 107
- Лапласа интегралы 92
- — — —, аналитическое продолжение 141—142
- — — —, асимптотическое разложение 92—95, 139—143
- — — —, метод 107, 113
- — — —, для контурных интегралов 158—162
- — — —, история 137
- — — —, оценки остатка 120, 127, 137, 174—175
- — — —, примеры 110—112, 115—117, 165—168
- — — —, связь с методом стационарной фазы 128
- — — —, преобразование 146
- — — —, абсцисса сходимости 147

- ЛГ-приближение, асимптотические свойства 251—264, 286—287
 — в особых точках 256—259, 261—264, 266
 — для комплексных переменных 286
 —, история 291—292
 —, одно обобщение 266—270
 —, оценки остатка 246, 250, 265—266, 267, 286
 —, производная остатка по параметру 276
 —, условие точности 246
 ЛГ-функции 244
 Лежандра полиномы 68 (см. также Феррерса функции, Лежандра функции)
 —, дифференциальное уравнение 72
 —, интеграл Лапласа 74
 —, — Шлефли 72
 —, оценка 74
 —, при большом значении степени 112, 165—167
 —, производящая функция 72
 —, рекуррентные формулы 71, 74
 —, формула Родрига 69
 Лежандра уравнение 214
 — функции 215, 221 (см. также Лежандра полиномы, Присоединенное уравнение Лежандра)
 —, аналитическое продолжение 227
 —, вронскианы 218
 —, интеграл Гейне 234
 —, — Неймана 232
 —, интегральные представления 221, 224—228, 230—232
 —, история 240—241
 — на разрыве 235
 —, оценка 235
 —, поведение в особых точках 217, 219—220, 231
 —, порядка или степени, равных $\pm 1,2$ 219—220
 —, порядок 221
 —, при большом значении степени 263
 —, производящая функция 235
 —, рекуррентные формулы 224—225, 228
 —, теорема сложения 233
 —, формула Уиппла 220
 —, формулы связи 217—218
 —, целого порядка 228, 235
 Лиувилль (Liouville J.) 291, 192
 Лиувилль — Грин см. ЛГ-приближение, ЛГ-функции
 Лиувилля — Неймана разложение
 Лиувилля преобразование
 Ловьер (Lauwierig H. A.) 168
 Ломмель (Lommel E. C. J.) 314
 Ломмеля метод отделения нулей 314
 Лью (Lew J. S.) 137
 Люк (Luke Y. L.) 89, 206, 240, 35
 Макдональд (Macdonald H. M.) 323
 Макдональда функция 320 (см. также Модифицированные функции Бесселя)
 Мак-Роберт (MacRobert T. M.) 241
 Максимов (Maximov L.) 105
 Мак-Хаф (McHugh J. A. M.) 292
 Меджерст (Medhurst R. G.) 124
 Метод наискорейшего спуска 174—177 (см. также Метод Лапласа)
 — последовательных приближений 181
 — стационарной фазы 127, 132—137
 —, —, история 137
 —, —, примеры 134—136
 —, —, связь с другими методами 128, 137—138, 177
 Миллер (Miller J. C. P.) 197, 292
 Модифицированное уравнение Бесселя 83
 —, —, численно удовлетворительные решения 321
 Модифицированные функции Бесселя 83
 —, —, аналитическое продолжение 324
 —, —, вронскианы 321
 —, —, графики 322
 —, —, интеграл Бассета 325
 —, —, нули 323—325
 —, —, при больших значениях аргумента 110, 122—124, 321, 322
 —, —, рекуррентные соотношения 83, 324
 —, —, свойства монотонности 322
 —, —, связь с вырожденными гипергеометрическими функциями 327, 332
 Моменты 95
 Монотонности теорема 186
 Монотонности условие 285
 —, необходимость 301
 Наттерер (Natterer F.) 292
 НГ (Ng E. W.) 89
 Нули, асимптотические приближения 270—273, 292

- Оберхеттингер (Oberhettinger F.) 356
 Олвер (Olver F. W. J.) 102, 122, 124, 137, 143, 146, 175, 177, 291, 292, 320, 346, 354, 356
 Ортогональные полиномы 65—74 (см. также Лагерра полиномы, Лежандра полиномы, Эрмита полиномы, Якоби полиномы)
 — —, дифференциальные уравнения 72, 73
 — — классические 68—74
 — —, нормировка 66
 — —, нули 67
 — —, производящие функции 73, 74
 — —, процесс Грама — Шмидта 67
 — —, рекуррентные формулы 66, 71, 72, 74
 — —, формула Кристоффеля — Дарбу 68
 Ортонормальные полиномы 66
 Особые точки дифференциальных уравнений (см. также Дифференциальные уравнения, Иррегулярные особые точки, ЛГ-приближение)
 — — — — на бесконечности 195—196
 — — — —, определяющее уравнение 190
 — — — —, показатели 190, 196
 — — — —, —, отличающиеся на целое число 192—195
 — — — —, разложения в них 189—190, 195
 — — — —, ранг 189, 196
 — — — —, регулярные 189, 195
 — — — —, численно удовлетворительные решения 196—198
 Остаток, остаточный член 12
 Пайк (Pike E. R.) 292
 Папперитца уравнение 200
 Параболического цилиндра функции 264—266 (см. также Вебера дифференциальное уравнение)
 — — — —, интегральное представление 266
 — — — —, обозначение 264, 292
 — — — —, при большом значении порядка 264—266, 292
 — — — —, связь с вырожденными гипергеометрическими функциями 332
 Питтнауэр (Pittnauer F.) 46
 Поля (Pólya G.) 137
 Полусходящийся ряд 13
 Порядка отношения 15—19
 — —, граничная постоянная 16, 18
 Поступательные пути 285, 340
 — —, выбор 287—290
 Похгаммер (Pochhammer L.) 56
 Похгаммера обозначение $(a)_s$ 202
 Прима функция 64
 Принцип аргумента 317
 — —, пример 323—324
 Производная в смысле Шварца 243
 Пси-функция 56, 57
 — —, формула Гаусса 87
 Пуанкаре (Poincaré H.) 14, 40, 43, 187
 Рассеяния теория 267
 Регулярная дуга 45, 188
 Редхеффер (Redheffer R. M.) 160
 Рейдинк (Reudink D. O. J.) 322
 Рейли (Rayleigh (Lord)) 292
 Реня (Wrench J. W.) 117
 Рискстныш Э. 46
 Риккати уравнение 244
 Риман (Riemann B.) 86, 88, 89, 177, 200, 201
 Римана — Лебега лемма 98, 99, 130, 137
 Римана уравнение 200
 Ритт (Ritt J. F.) 46
 Ритчи (Ritchie R. H.) 63
 Робертс (Roberts J. H.) 124
 Робин (Robin L.) 241
 Р. С. (Royal Society) 317, 356
 Свирис Б. С. 263
 Связи формулы 210, 291—292
 Сеге (Segé G.) 89, 137, 177
 Седловая точка 164, 176
 Сибуйа (Sibuya Y.) 356
 Слейтер (Slater L. J.) 240, 356
 Сноу (Snow C.) 241
 Стационарные точки 127
 Стейниг (Steinig J.) 356
 Стейтон (Staton J.) 63
 Стенджер (Stanger F.) 356
 Стеффенсен (Steffensen J. F.) 93
 Стильбеса преобразование 122
 Стирлинга формула 117
 Стокс (Stokes G. G.) 137
 Стокса явление 307
 Струве уравнение 352
 — функция 352, 356
 Суини (Sweeney D. W.) 88
 Тени зоны 285
 — —, необходимость 301

- Тетрагамма-функция 56
 Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 42, 89
 Томе (Thomé L. W.) 295
 Торн (Thorne R. C.) 285
 Точки перевала 164, 176
 — поворота (ветвления) 144
 Трансцендентные уравнения, асимптотические решения 23—29, 46
 Тригамма-функция 56
 Трикоми (Tricomi F. G.) 156, 356

 Уаймен (Wyman M.) 46, 137, 177
 Уиддер (Widder D. V.) 93, 137
 Уиттекер (Whittaker E. T.) 88, 195, 240, 264
 Уиттекера уравнение 333
 — —, формулы связи для решений 335
 Уиттекера функции 333 (см. также Вырожденные гипергеометрические функции, Уиттекера уравнение)
 — — при большом значении аргумента 333, 341
 — — при большом m 333—335, 356
 Уонг (Wong R.) 137
 Урселл (Ursell F.) 177

 Фабри преобразование 295
 Федорюк М. В. 138
 Феррерс (Ferrers N. M.) 241
 Феррерса функции 235—239 (см. также Лежандра полиномы, Лежандра функции)
 Фикс (Fix G.) 292
 Франклин (Franklin J.) 93
 Френеля интегралы 63, 83
 — —, асимптотическое разложение 91
 Фробениус (Frobenius G.) 191, 195
 Фробениуса метод 195, 311
 Фукс (Fuchs L.) 185
 Функция контроля ошибки 247, 256—258, 284

 Фурье интегралы 100
 — —, асимптотическое разложение 91

 Ханделсман (Handelsman R. A.) 137, 138
 Характеристическое значение 295
 — уравнение 295
 Хартман (Hartman R.) 183, 240
 Хеткоут (Hethcote H. W.) 292, 356
 Хорн (Horn J.) 356
 Хохштадт (Hochstadt H.) 89
 Хсие (Hsieh P.-F.) 356

 Цилиндрические функции 318 (см. также Бесселя функции)
 Цирулис Т. 137

 Чако (Chako N.) 138
 Чебышева полиномы 73
 Черри (Cherry T. M.) 285

 Шварца принцип симметрии 166
 Шмидт (Schmidt H.) 46

 Эйлер (Euler L.) 14, 87, 204
 Эйлера постоянная 51, 57, 89
 Эллиптические интегралы 205
 Эрдейи (Erdélyi A.) 40, 46, 88, 108, 114, 137, 150, 156, 292, 354, 356
 Эйри (Airy J. R.) 98
 Эйри интеграл (см. Эйри функция)
 — уравнение 77, 356
 — функция 74
 — —, асимптотические разложения 134—135, 151—154
 — —, дифференциальное уравнение 77
 — —, оценки 153
 — —, связь с функциями Бесселя 84
 Эрмита полиномы 69, 71, 73, 332

 Якоби лемма 235
 — полиномы 73, 212

$A_s(v)$ 132
 $A_v(x)$ 84
 $AI(x)$ функция Эйри 74
 $(a)_s$ символ Похгаммера 202
 $C(z)$ интеграл Френеля 63
 \mathcal{C}_v цилиндрическая функция 318
 $Si(z)$, $Si_l(z)$ интегральные косинусы 60
 $E(k^2)$ эллиптический интеграл 205
 $E_v(x)$ функция Вебера 135
 $E_1(z)$, $E_n(z)$ интегральные показательные функции 57, 61
 $Ei(x)$, $Ei_n(z)$ интегральные показательные функции 58
 $\operatorname{erf} z$, $\operatorname{erfc} z$ интегралы вероятностей 62
 $F(a, b; c; z)$, $F(a, b; c; z)$ гипергеометрические функции 202
 ${}_pF_q$ обобщенная гипергеометрическая функция 213
 $G(a, b; c; z)$ 207
 $H_n(x)$ полином Эрмита 69
 $H_v(z)$ функция Струве 352
 $H_v^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ функции Ганкеля 304
 $I_0(z)$ модифицированная функция Бесселя 83
 $J_n(z)$, $J_v(z)$ функция Бесселя 78
 $J_v(x)$ функция Ангера 135
 $j_{v,s}$, $j_{v,s}$ нули функций Бесселя 314
 $K_v(z)$ 352
 $K(k^2)$ эллиптический интеграл 205
 $K_0(z)$ модифицированная функция

Бесселя
 $L_n^{(\alpha)}(x)$ полином Лагерра 69
 $\mathcal{L}(q)$ преобразование Лапласа 146
 $li(x)$ интегральный логарифм 59
 $M(a, c, z)$, $M(a, c, z)$ вырожденные гипергеометрические функции 326
 $M_{h,m}(z)$ функция Уиттекера 333
 $N(a, c, z)$, $N(a, c, z)$ 327
 O , o символы порядка 15—19
 $P\{ \}$ символ Римана 200
 $P_n(x)$ полином Лежандра 68
 $P_v^{-\mu}(z)$, $P_v^{\mu}(z)$ функция Лежандра 215
 $P_v^{\mu}(x)$ функция Феррерса 236
 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ полином Якоби 69
 $Q_n(z)$, $Q_v^{\mu}(z)$, $Q_{\mu}(z)$ функции Лежандра 230, 226, 215
 $Q_v(x)$, $Q_v^{\mu}(x)$ функции Феррерса 236
 $S(z)$ интеграл Френеля 63
 $Si(z)$, $si(z)$ интегральные синусы 59
 $U(a, x)$ функция параболического цилиндра 264
 $U(a, c, z)$, $V(a, c, z)$ вырожденные гипергеометрические функции 328
 \mathcal{U} вариационный оператор 43—45
 \mathcal{V} вронскиан 181
 $W_{h,m}(z)$ функция Уиттекера 333
 $Y_v(z)$ функция Бесселя 309
 $y_{v,s}$, $y'_{v,s}$ нули функций Бесселя 319
 $\Gamma(z)$ гамма-функция 47
 $\Gamma(\alpha, z)$ неполная гамма-функция 64
 γ постоянная Эйлера 51

- $\Upsilon(\alpha, z)$ неполная гамма-функция 64
 $B(r, q)$ бета-функция 53, 54
 $\delta_{n,s}$ символ Кронекера 66
 $\zeta(z)$ дзета-функция 84
 V модифицированный оператор дифференцирования 213
 $\chi(a)$ 288
 $\psi(z)$ пси-функция 56, 57
 $(t_1, t_2)_{\mathcal{C}}, [t_1, t_2]_{\mathcal{C}}, (t_1, t_2]_{\mathcal{C}}, [t_1, t_2)_{\mathcal{C}}$ части контура 16
 $\{x, \xi\}$ производная в смысле Шварца 243
 $-x \pm i0$ берега разреза 59
 \doteq приближенное равенство 13
 \sim асимптотическое равенство 15, 17, 29, 40
 $(0+)$ $(1+, 0+, 1-, 0-)$
 $\int_{-\infty}^{\cdot}$, \int_{\cdot}^{\cdot} интегралы по петле 54, 56